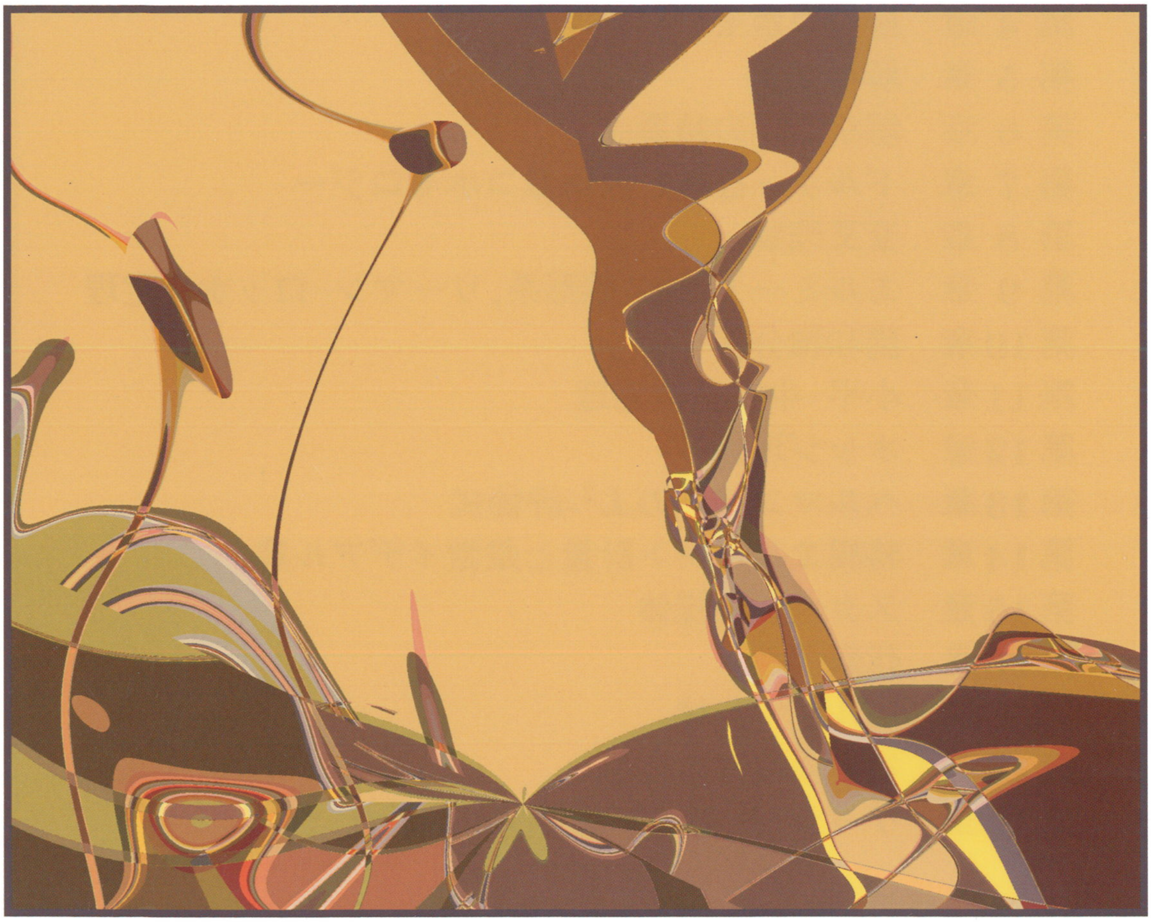
昭和38年7月2日第3種郵便物認可
2012年10月1日発行　第50巻10号　毎月1回1日発行
ISSN 0386—2240

数理科学

10
2012

特集 超弦理論の数理
最先端の数学が拓く新たな自然像



No.592

サイエンス社

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 592 October 2012

超弦理論の数理

最先端の数学が拓く新たな自然像

表紙：戸川　隼人

お得な定期購読をおすすめします

毎号確実に御手元へ

地域によって書店店頭に陳列されない場合があります．**郵送料小社負担**にて確実に御手元へ届く定期予約購読をおすすめします．

予約購読は1年間（本誌のみ）11,000円，半年間（本誌のみ）5,500円．（税込み価格）

造本コストは更に上昇気味です．小社としてもあらゆる努力をもって廉価で提供してゆきたいと思っておりますが，定価改定の止むなき事態がかんがえられます．この場合予約購読期間中のものにつきましては料金据置きとなります．なお，臨時別冊のご注文については，本誌予約購読者の方には，商品到着後のお支払いにて承ります．

お申し込みは本誌とじ込みの振替用紙を御利用下さい．

数理科学特集一覧

63年/7～2009年/5 省略
2009年/6 現象と物理概念を結ぶ方程式
/7 現代物理の世界像
/8 複素数
/9 シュレーディンガー
/10 数学と物理に広がる不変量
別冊 量子重力理論
/11 可積分系の世界
/12《原理》の探求
2010年/1 無限次元の魅力
/2 数学の可視化
/3 物理数学の効用
/4 現代数学はいかに使われているか［確率編］
別冊 現代幾何学の発展
/5 物理学事始め
/6 現代幾何と方程式
/7 物理学と行列
/8 力の統一にむけて
/9 南部陽一郎
/10 曲面の不思議
/11 連続から離散へ
/12 物理における《破れ》と調和
2011年/1 数論の探求
/2 物理現象を読み解く数学的手法
/3 方程式と現代代数学
/4 物理学と多様体
/5 初学者を悩ます数理の概念
/6 物理イメージと数式表現
/7 〈隠れた〉物理法則
/8 計算が拓く数学と物理の世界
/9 オイラー
/10 時空と熱力学
/11 線形から非線形へ
/12 物理と仮説
2012年/1 数学から物理へ，物理から数学へ
/2 古典のススメ［物理編］
/3 量子を操る
/4 量子力学の数学的技法
/5 解析学と物理学
/6 面白い発想［物理編］
/7 数学と物理における格子
/8 導来圏をめぐって
/9 ハイゼンベルク

数理科学臨時別冊一覧

11年/10 実例で学ぶ 精度保証付き数値計算
11年/11 リーマン予想の数理物理
11年/12 量子多体系の物理
12年/1 現象から方程式を創り出す
12年/3 演習形式で学ぶリー群・リー環
12年/4 弦理論の代数的基礎
12年/5 アインシュタイン方程式
12年/6 CP対称性の破れ
12年/7 弦の場の理論
12年/9 超弦理論の応用

「数理科学」のバックナンバーは下記の書店・生協の自然科学書売場で特別販売しております

紀伊國屋書店本店（新宿）
紀伊國屋書店新宿南店
あおい書店中野本店
オリオン書房ノルテ店（立川）
くまざわ書店本店（八王子）
くまざわ書店桜ヶ丘店（多摩）
書泉グランデ（神田）
三省堂本店（神田）
リブロ池袋店
ジュンク堂書店（池袋）
芳林堂（高田馬場）
MARUZEN & ジュンク堂渋谷店
八重洲ブックセンター（東京駅前）
丸善丸の内本店（東京駅前）
丸善日本橋店
丸善多摩センター店
ジュンク堂書店吉祥寺店
ブックファースト青葉台店（横浜）
有隣堂イセザキ町本店（横浜）
有隣堂西口・東口（横浜）
有隣堂厚木店（厚木）
ジュンク堂書店（盛岡）
丸善津田沼店
ジュンク堂書店（新潟）
ジュンク堂甲府岡島店
ジュンク堂新静岡店
戸田書店静岡本店
ジュンク堂大阪本店
紀伊國屋書店梅田店（大阪）
アバンティブックセンター（京都）
ジュンク堂書店（京都）
ジュンク堂京都BAL店
ジュンク堂書店三宮店
ジュンク堂三宮駅前店（神戸）
ジュンク堂書店（大分）
喜久屋書店倉敷店
MARUZEN & ジュンク堂広島店
紀伊國屋書店福岡本店
ジュンク堂福岡店
丸善博多店
ジュンク堂鹿児島店
紀伊國屋書店新潟店
ジュンク堂書店旭川店
金港堂（仙台）
金港堂パーク店（仙台）
ジュンク堂書店（仙台）
ジュンク堂書店（秋田）
ジュンク堂書店郡山店
鹿島ブックセンター（いわき）
友朋堂（つくば）

――大学生協・売店――
東京大学 本郷・駒場
東京工業大学 大岡山・長津田
東京理科大学 新宿
早稲田大学 理工学部
慶応義塾大学 矢上台
福井大学
筑波大学 大学会館書籍部 第一学群書籍部
埼玉大学
名古屋工業大学・愛知教育大学
大阪大学・神戸大学 ランス
京都大学・九州工業大学
東北大学 理薬・工学
室蘭工業大学
徳島大学 常三島
愛媛大学 城北
山形大学 小白川
島根大学
学習院大学 成文堂
北海道大学 クラーク店
熊本大学
名古屋大学
広島大学（北1店）
九州大学（理系）

October 2012 MATHEMATICAL SCIENCES Number 592

特集／超弦理論の数理

巻頭言

大栗 博司

現在知られているすべての素粒子の性質は，標準模型と呼ばれる場の量子論にまとめられています．世界最大の加速器物理学研究所であるCERNではヒッグス粒子の探索が行われており，2012年7月4日には新粒子の発見が発表されました．これが実際にヒッグス粒子なら，標準模型の予言するすべての素粒子が確認されたことになります．しかし，標準模型が自然界のすべてを記述するわけではありません．そもそも，この模型には重力相互作用が含まれていません．場の量子論とは，特殊相対論と量子力学を前提とする理論ですが，これを一般相対論まで含むようにしようとすると，そのままでは量子力学と齟齬が生じるからです．また，最近の宇宙物理学の観測によると，宇宙のほとんどはまだ正体のわからない暗黒物質や暗黒エネルギーでできていると考えられています．そのため，標準模型は，より基礎的な理論から導かれるべきものであると考えられています．そして，このような究極の統一理論の最も有望な候補が超弦理論なのです．

超弦理論の過去30年の発展の中では，最先端の数学の様々な手法が使われてきました．また，超弦理論の研究は，数学の諸分野に影響を与えてきました．そこで今回の特集では，超弦理論の様々な数学的アプローチを俯瞰することを目的としています．

最新の研究成果を紹介するために，若手研究者を中心に記事の執筆をお願いしました．全部で8本の解説記事のうち，5本は30代の気鋭の研究者によるものです．残りの3本は，私と同年代の研究者と先輩にお願いしました．超弦理論の数理的手法の開発における先駆的研究者として過去30年以上にわたってこの分野を指導してこられた江口徹さんは，この分野の将来を展望するコラム記事を書いてくださいました．

弦理論の最近の進歩として重要なものに，M理論のM5ブレーンやM2ブレーン（メンブレーン）の力学の理解があります．M5ブレーンの運動は6次元の共形場の理論で理解できるはずですが，それを6次元で直接調べる方法はまだよくわかっていません．しかし，この6次元を部分的にコンパクト化すると，低次元の共形場の理論と関係付けることができます．山崎雅人さんの「場の理論の分解学」はこの方法を直感的に説明したわかりやすい解説記事です．

特に，6次元が2次元のリーマン面と $\mathbb{R}^4$ の直積のときには，リーマン面上の共形場の理論の相関関数が4次元の $N = 2$ 超対称ゲージ理論のNekrasov分配関数に等しいことが期待され，これはAlday–Gaiotto–立川（AGT）予想と呼ばれています．これは双対性（デュアリティ）と呼ばれるものの一つですが，その中でも数学的に厳密な定式化ができるものとして意義があります．中島啓さんは，この予想の数学的に深い内容から，最近発表されたAGT予想の証明のアイデアに至るまでを，丁寧に解説してくださいました．

超弦理論の双対性は，数学的に厳密な表現がなされている例が少ないので，例えば共形場の理論やトポロジカルな弦理論などと比べて，数学者が参入しづらい分野でもあります．特に，弱結合展開と強結合展開を入れ替えるS双対性は数学的な説明が難しい．立川裕二さんは，このS双対性の重要な例である混成弦理論（ヘテロティック弦理論）とII型の超弦理論との双対性のある側面を，数学の言葉に翻訳した記事を書かれました．このような努力が，この方面の数学者と物理学者の交流の促進につながることを望みます．

M5ブレーンと並んで，M2ブレーンの運動を記述する3次元の理論が何であるかも長い間謎でしたが，これを3次元のゲージ理論で表現する方法がわかってきました．細道和夫さんの記事では，M2ブレーンの基本的性質から，ゲージ理論の構成，そして局所化原理を使った自由エネルギーの$N^{3/2}$スケール則の証明という最近の発展まで解説されています．M2ブレーンの最近の重要な発展がすべてきちんと押さえてあるので，この方面の現状が一望できます．

超弦理論の研究は，1995年の第二次超弦理論革命によって大きく様変わりしました．それ以前には超弦理論の基本的な言語は2次元の共形場の理論でしたが，それ以後では，4次元の$N=4$超対称ゲージ理論などのように高次元の共形場の理論の研究も重要になりました．M5ブレーンの低エネルギー有効理論とされる6次元の理論も共形場の理論の重要な例です．2次元の共形場の理論の重要な性質としてZamolodchikovのc定理というものがありますが，これが高次元の理論でどれほど成り立つのかは，現在活発に研究されている課題です．中山優さんの記事は，この方面の研究の現状を独自の視点から解説し，またご自分の研究であるホログラフィー原理との関連についても触れられています．

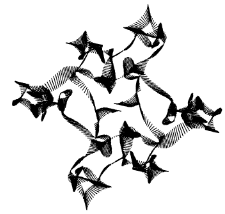
超弦理論は究極の統一理論の候補なので，その主要な目標としては，素粒子の標準模型の性質を基本原理から導くこと，暗黒物質や暗黒エネルギーの謎を解明すること，素粒子物理学実験や天体物理学観測などで検証できる予言をすることなどがあげられます．超弦理論は10次元の時空間に定義されているので，それからどのようにして4次元の素粒子模型が導かれるかを理解することは重要な一歩です．この問題には様々なアプローチがありますが，渡利泰山さんは，最近有望と考えられているF理論の幾何学的方法について解説してくださいました．

先ほど，第二次超弦理論革命の以前には2次元の共形場の理論が重要であったと述べましたが，これと同時に可解模型の理論も注目されていました．1992年から5年間，三輪哲二さんを代表とする「無限次元の可積分系と無限次元代数」が科研費の重点領域に選ばれ，私も研究分担者として参加しました．第二次超弦理論革命によって，ゲージ理論の幾何学など異なる方面の数学も重要になりましたが，最近になってAGT予想に2次元の共形場の理論が現れたり，AdS/CFT対応の微視的な理解に可解模型の方法が応用されるようになり，この方面の数学が再び注目されています．中西知樹さんの記事は，可解模型の方法を，超対称ゲージ理論のBPS数え上げの問題やChern–Simonsのゲージ理論の数理とつなぐ，「団代数」の解説です．団代数の概念は，山崎雅人さんの解説記事にも登場していますので，合わせて読まれるとよいでしょう．

この特集の最後を飾るのは，村瀬元彦さんによる「カタラン数」とトポロジカルな弦理論との関係の話題です．カタラン数は様々な組合せ論的問題に現れる興味深い数です．私自身の研究でも，トポロジカルな弦理論とブラックホールの状態数の関係を表す大栗–Strominger–Vafa (OSV) 予想の非摂動効果の評価に現れます．村瀬さんの記事は，トーリック型のカラビ・ヤウ多様体についてのトポロジカルな弦理論の摂動展開の漸化式に関するものですが，同じ構造が非摂動効果の評価に現れるというのも不思議で，何かまだ私たちの知らない構造があるのではないかと思わせます．

（おおぐり・ひろし，カリフォルニア工科大学，
東京大学国際高等研究所カブリ数物連携宇宙研究機構）

場の理論の分解学



山崎　雅人

1. 場の理論全体を理解する

本稿が話題にしたいのは**場の理論**である．場の理論というのは量子力学を無限の自由度にしたものである．その適用範囲は広大であり，素粒子レベルのミクロな構造から宇宙そのものまで，対象とするスケールも様々である．物理学手法によって世界を理解するための最も基本的なパラダイムの一つであるといっても過言ではない．

それでは，我々は一体どの程度場の理論を理解していると言えるのだろうか？

普通，場の理論を理解するというとき意味されるのはある特定の理論を理解することである．例えば，ϕ^4 理論であるとか，量子電磁力学などはその例である．しかし，ここで提起したいのはもっとメタな問題である．場の理論そのもののなす空間を考えたときに，その空間のうち我々の既に理解している部分はどれほどだろうか？ もう既にほとんどの場の理論が見つかっているのか，それともまだ未知の場の理論のほうが多いのか？ また，場の理論の間にどのような関係があり，場の理論の全体は何か構造を持つのだろうか？

これらの問題に完全な解答を与えることは極めて難しい問題であるし（最近の試みとして文献 1) を参照），そもそも場の理論を「分類」するというときにそれが正確に何を意味するかが問題になる．現在場の理論を数学的に完全に厳密に定式化することはなされていないので，問題自体厳密に定式化されているわけでもない．しかし，完全な分類は現在の知識ではできないにしても，特定のクラスの場の理論に制限することで何か分かることはないだろうか？

理論のクラスを制限する良い方法は，次元を下げて自由度を減らしたり，あるいは**超対称性**のように高い対称性を課したりすることである．例えば，2 次元の固定点を記述する共形場理論においては，中心荷電と呼ばれている量が 1 以下のときに分類が知られている．また，4 次元のゲージ理論でも，超対称性が一番高い場合にはその分類がなされていると考えられている．しかし，ここで問題にしたいのはより一般の 3, 4 次元超対称ゲージ理論である．これらの理論は超対称性によって制限があるものの制限が分類そのものを与えるほど強くもない．

物理学の勉強をした読者の中には，問題の答えは既に教科書にあると考える読者もいるだろう．解析力学の教科書を開くと，そこではいつもラグランジアンやハミルトニアンから話は始まるし，場の理論の教科書（の大多数）でもそれに変わりはない．つまり，物理学というのは現象を記述する適切なラグランジアン・ハミルトニアンを探してくるのが最大の問題であって，それさえわかればあとは機械的な手続きに従ってそこから出てくる数学（例えば微分方程式）を解けばいいのである．

では，場の理論のラグランジアンはどんなデータによって指定されるのだろうか？ 例として場の

理論の教科書によく登場する ϕ^4 理論を考えよう（ϕ はスカラー場）．この場合ラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi^\mu \partial \phi + \frac{m^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \qquad (1)$$

である．ただし，$\phi \to -\phi$ という対称性を課すことにしたので例えば ϕ^3 の項はない．この対称性の下ではラグランジアンに例えば $\lambda_{2n}\phi^{2n} (n \geq 3)$ という項を足すことは許されるので，この理論は無限個のパラメーターを持つようにみえる．しかし，**繰り込み群**を考えると状況は変わる．エネルギースケールを変えると，ラグランジアンのパラメーターはそのエネルギースケールに応じて変化するが，λ_{2n} はエネルギースケールを下げていくと小さくなっていくことが知られている．一般に繰り込み群の思想として，低エネルギー領域では理論は有限個のパラメーターで記述されると考えられている．場の理論が予言能力を持つのはまさにこのためであり，低エネルギー有効理論は高いエネルギーの物理の詳細に依存しない．従って，**赤外固定点**に議論を限定することにすれば，ラグランジアンの持つパラメーターは有限であり，理論にどのような場がいて（この場合はスカラー場 ϕ），さらに質量は何であるか，またどのように相互作用するか（この場合は m, λ）というデータによって理論が決まることになる．それでは，これが赤外固定点の物理を完全に記述するのだろうか？

しかし，話はいろいろと複雑である．まず，赤外固定点ではしばしば結合定数が大きくなり，強く相互作用が起こる．実際の物性系などで興味を持たれている系の多くがそうであるし，ミレニアム問題になっているクォークの閉じこめのときもそうだ．この場合，ラグランジアンのパラメーターについて展開する摂動展開は適用できない．つまり，ラグランジアンがあったからと言って，そこから実際の物理量に機械的にたどり着けるわけではなく，例えば格子にのせてスーパーコンピューターでシミュレーションすると言った大変な計算が必要になる．

ラグランジアンと物理（固定点）との対応は単に複雑なだけではなく，そもそも1対1ではない．その一つの理由が，場の理論の**双対性**である．これは（今の文脈では）高エネルギー領域では2つの別のラグランジアンで記述される理論の組が繰り込み群の下で同じ赤外固定点に流れていくという現象を指す．例えば，既に現れた4次元の $\mathcal{N}=4$ ゲージ理論では，電場と磁場を入れ替えるような対称性（S双対性）が存在するので，結合定数が g の理論と $1/g$ の理論は同一視される*1)．また，4次元の超対称性 $\mathcal{N}=1$ 理論におけるサイバーグ双対性や3次元のミラー対称性（後に再登場）などはその良い例である．一般に，2つラグランジアンがあったときにそれが同じ赤外固定点に流れていくのかどうかを判定するアルゴリズムは知られていない．

問題はそれだけではない．場の理論の中にはラグランジアンによる記述が存在しない（と信じられている）ものもある．その良い例が**6次元の** $(2,0)$ **理論**と呼ばれる共形場理論である．この $(2,0)$ というのは超対称性の数を右向き左向きそれぞれについて示したものであるが，ここでは超対称性による制約が強いということだけが重要である．この理論はもともと弦理論から存在が示唆されたものであるが，純粋に場の理論における非自明な固定点としても理解できるものである．

これらの議論が示すように，ラグランジアンから出発して場の理論を調べる方法は強力であるが同時に限界もあり，ラグランジアンから実際の物理への写像は単射でなければ全射でもない．また，ラグランジアンの段階で双対性を理解するのはかなり非自明であることからも分かるように，ラグランジアンどうしを比較するのも容易ではない．それならば，場の理論を調べるための何か別の枠組みはあるだろうか？

以下で考えたいのは，（ラグランジアンを持たない）高次元の場の理論から出発して，それを**コンパクト化**することによって低い次元の場の理論を定義するという方法である．このとき，低次元での場の理論はコンパクト化する多様体の選択に依

*1) この場合は繰り込みは起こらずラグランジアンレベルで既に固定点上にある．

存するので，一つの理論ではなく理論のクラスを考えることになる．この理論どうしの関係を明らかにするのが目的である．

2. ゲージ理論を分解する

具体的にこれから考えたいのは，先に登場した 6 次元の共形不変性を持つ (2,0) 理論である．例として，これを 2 次元多様体 C および 3 次元多様体 M にコンパクト化することを考えよう．このとき現れる場の理論をそれぞれ T_C（4 次元理論），T_M（3 次元理論）と書くことにしよう．ここで，T という記号は理論（theory）からとった．これらの理論はしばしば紫外領域のデータで記述されるが，実際に興味のあるのは先に説明したようにどちらかというと赤外での固定点である．

場の理論のこの定義は抽象的であるが多様体 C，M に関する数学的な知見が使えるという利点がある．もちろん，6 次元理論自体良くわかっていない理論なので，それをコンパクト化するという操作自体を直接実行することはできない．しかし，6 次元理論が存在することだけで既に多くのことが従うのである．以下では文献 2) に基づいてこれを説明しよう．

多様体の分類で基本的な役割を果たすのは，多様体を**分解**する操作である．ペレルマンによるポアンカレ予想の際に脚光を浴びた幾何化予想も，3 次元多様体の分解に関するものであった．これをゲージ理論の言葉に読み直すことによって，ゲージ理論を「分解」したり「貼り合わせ」たりできるはずである．

3 次元多様体の分解にはいくつも方法が知られているが，ここでは 3 次元多様体 M を切断することを考えよう．このとき，切り口にはある 2 次元多様体 C が現れるので，C を境界に持つ 3 次元多様体が現れる．

まず，設定を簡単にするために，3 次元多様体 M の境界が C そのものである状況を考えることにしよう（図 1 左）．このとき，M の分配関数を径路積分で計算したいが，M は境界 C を持つので，

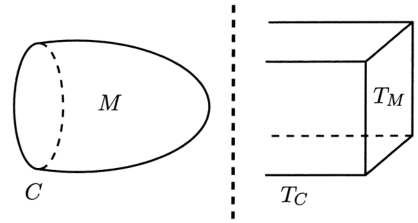


図 1　境界付きの多様体を考えることは，ゲージ理論の境界条件を考えることに対応する．

そこでの境界条件を指定しないといけない．理論に存在するすべての場を ϕ，境界条件を $\phi = \phi_0$ と書くことにすると，分配関数は ϕ_0 の（汎）関数になる：

$$Z_M[\phi_0] = \int_{\phi|_C=\phi_0} \mathcal{D}\phi \; e^{-S[\phi]} \; . \tag{2}$$

これは，C に付随したヒルベルト空間 $\mathcal{H}_C$ の元（波動関数）と見なすことができる：

$$|Z_M\rangle \in \mathcal{H}_C \; . \tag{3}$$

このような定式化は，数学では位相的場の量子論の公理系[3]として知られている．実際，後でみるように我々の設定では M 上の理論は位相的な理論になっている．

それでは，これをゲージ理論の世界に読み替えよう．前述したように T_C は 4 次元の理論であり，T_M は 3 次元の理論である．だから T_M の中では T_C は 4 次元 1 を持つように見える．従って，T_M は T_C の境界条件とみるのが自然である（図 1 右）．

これを次のように書くこともできる．理論 T_C があると，それに対応したヒルベルト空間 $\mathcal{H}_{T_C}$ が存在する．境界条件を選ぶとは，そのヒルベルト空間から一つの元を選ぶことに他ならない：

$$|T_M\rangle \in \mathcal{H}_{T_C} \; . \tag{4}$$

これは明らかに (3) に対応し，4 次元のゲージ理論が T_C が 3 次元のゲージ理論 T_C によって指定される境界条件を持つことと解釈できる．

さて，今度は M が 2 つの境界 C_1 と C_2 を持つ場合を考えよう（図 2 左）．この場合，M は C_1

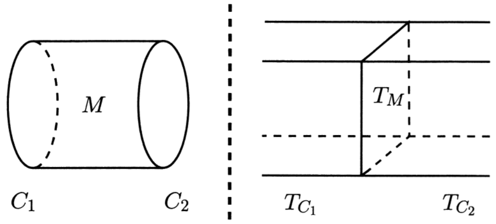


図 2 C_1 と C_2 をつなぐ多様体 M はゲージ理論 T_{C_1}, T_{C_2} の間のドメインウォールに対応する．

と C_2 の**コボルディズム**であると言われる．この場合，今度は Z_M は 2 つの境界に付随したヒルベルト空間の間の写像と見なすのが自然である：

$$Z_M \in \mathrm{Hom}(\mathcal{H}_{C_1}, \mathcal{H}_{C_2}) = \mathcal{H}^*_{C_1} \otimes \mathcal{H}_{C_2} \ . \quad (5)$$

但し，$\mathcal{H}^*$ は $\mathcal{H}$ の双対 $\mathcal{H} = \mathrm{Hom}(\mathcal{H}, \mathbb{C})$ であり，M から自然に入る向き付けが C_1 と C_2 で異なることから $\mathcal{H}$ かその双対かの違いが生じた．

場の理論での状況は図 2 右を考えるとわかりやすく，T_M は T_{C_1} と T_{C_2} の間に存在する**ドメインウォール**に対応する[*2)]．

多様体のコボルディズムには自然な積構造が入る（図 3 左）．つまり，2 つのコボルディズムをつなげてやればよい．この場合，

$$M = M_1 \cup M_2 \quad (6)$$

は 2 つの写像

$$Z_{M_i} \in \mathrm{Hom}(\mathcal{H}_{C_i}, \mathcal{H}_{C_{i+1}}) \quad (i = 1, 2) \quad (7)$$

の合成を考えることに対応する：

$$Z_{M_1 \cup M_2} = Z_{M_1} \cdot Z_{M_2} \in \mathrm{Hom}(\mathcal{H}_{C_1}, \mathcal{H}_{C_3}) \ . \quad (8)$$

これは，ゲージ理論の側ではドメインウォールを 2 つ用意し，それが重なり合って一つのドメインウォールになる操作だと見なすことができる．ドメインウォールの間隔は 3 次元ゲージ理論の結合定数の逆数を与えるので，ウォールを近づける操作は赤外固定点に近づくことを意味する．このようにして多様体のコボルディズム群はゲージ理論の境界条件のなす群に対応する！ 与えられた 3 次元多様体をコボルディズムの積によって分解すると多様体を幾何的に分解できるが，今はこれがゲージ理論の分解という物理の問題に翻訳されたことになる．

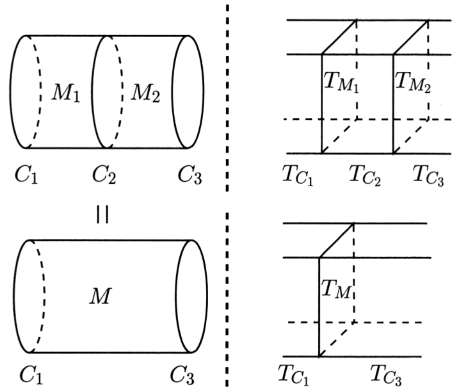


図 3 2 つのコボルディズムをつなぎ合わせることは 2 つのドメインウォールを重ね合わせることに対応する．

ここで状況を整理してみよう．3 次元ゲージ理論 T_M の立場からすると，それを 4 次元ゲージ理論 T_C の境界条件と考えると言うことは 4 次元理論（ゲージ群を G とする）との相互作用，ここではゲージ相互作用の仕方を決めることと同じである．4 次元理論のゲージ場は力学的自由度を持つが，そのゲージ対称性は 3 次元理論としては力学的自由度に見えないので大域対称性に見える．ドメインウォールは右と左 2 つの 4 次元ゲージ理論と結合しているので，$G \times G$ の大域対称性を持つことになる．図 3 右にあるようにゲージ理論を貼り合わせるときにはこれらの対称性が再度ゲージ化されることになる．

ただし，ここで微妙なのは，しばしば $G \times G$ の対称性すべてがあらわなラグランジアンを書くことはできないことである：例えばある状況では 2 つの G を取り替える操作は 3 次元のミラー対称性であり，これは赤外固定点を保つがラグランジアンは大きく変更を受ける．従って，ゲージ理論を貼り合わせる操作には一般にラグランジアンに

*2) 以上の議論は M の境界が 3 つ以上ある場合にも一般化でき，その場合は T_M は複数の T_C が集まってできるジャンクション上での理論と見なすことができる．

ない対称性をゲージ化する必要があり，一般には T_M はラグランジアンを持たない理論になる．

これまでの議論をもっと定量的にすることもできる．具体的には，図 2 の M 上の理論の分配関数を計算しよう．径路積分で境界条件を指定するには，(2) のように境界での場の値を指定してやればよかったが，ここでは C_1, C_2 に直交する M の方向（水平方向）を時間方向と見なし，ハミルトン形式を用いよう．量子系では場は交換関係を満たしているので，不確定性関係が存在し，すべての場の値を決めてしまうことはできない．そこで，自由度を位置と運動量に分けて位置についてだけ条件を課すことになる．C_1 と C_2 での位置座標をそれぞれ m, ζ で表すことにすると

$$Z_M = \langle m | \zeta \rangle \tag{9}$$

となる．但し，通常の量子力学系ではハミルトニアンによる時間発展を考える必要があるが，M 上の理論は位相的なのでハミルトニアンは自明である．また，C と C'' での位置の選択は同じである必要はないので，2 つの位置座標を関係づけるには正準変換が必要である．それを $\hat{\varphi}_M$ で表すと，

$$Z_M = \langle m | \zeta \rangle = \langle m | \hat{\varphi}_M | m' \rangle \tag{10}$$

と書くことができる．このとき (8) に相当する主張は

$$\begin{aligned} Z_M[m, m''] &= \int [dm'] \, Z_{M_1}[m, m'] Z_{M_2}[m', m''] \\ &= \int [dm'] \, \langle m | \hat{\varphi}_{M_1} | m' \rangle \langle m' | \hat{\varphi}_{M_2} | m'' \rangle \\ &= \langle m | \hat{\varphi}_{M_1} \hat{\varphi}_{M_2} | m'' \rangle \end{aligned}$$

となる．但し，ここで完全性の式

$$\int [dm] \, |m\rangle \langle m| = 1$$

を用いた．

この分配関数 Z_M に対応する超対称ゲージ理論 T_M 側の量が S^3 分配関数である（細道氏の記事を参照）．この分配関数には紫外発散があるが正則化することによって有限な値を持ち，その答えは先のパラメーター m, ζ に依存する．ゲージ理論の言葉に翻訳すると，m や ζ というのは実質量や FI パラメーターと呼ばれる理論のパラメーターであり，正準変換 $\hat{\varphi}_M$ は場の理論を記述する自由度を取り替える操作であると解釈できる．例えば，m と ζ が互いに位置と運動量を取り替えた関係にある，つまり m と ζ がフーリエ変換の関係にあるとしよう．このとき，m と ζ を取り替える操作は 3 次元超対称ゲージ理論のミラー対称性であり，それは 3 次元で粒子の記述と渦糸の記述を取り替える操作である*3)；3 次元ではゲージ場 A_μ を考える代わりに $\partial_\mu \phi = \epsilon_{\mu\nu\rho} \partial_\nu A_\rho$ で関係づいたスカラー場 ϕ を考えてもよく，そのとき粒子とソリトンとが入れ替わる．これは 4 次元で電場と磁場を入れ替える操作の 3 次元版である．

より複雑なゲージ理論を得るには，これまで得たゲージ理論を適宜貼り合わせていけばよく，一般には分配関数は

$$Z_M = \langle m | \hat{\varphi}_1 \hat{\varphi}_2 \dots \hat{\varphi}_n | m' \rangle \tag{11}$$

の形になる*4)．

このようにして出てきた量 Z_M は 3 次元ゲージ理論 T_M の S^3 上の分配関数であると同時に 3 次元多様体 M 上の 3 次元チャーン・サイモンズ理論の分配関数でもあり，M の不変量を与える．特に，M が双曲多様体であるときには Z_M は M の双曲体積に量子補正を加えたものであり，いわば量子**双曲幾何学**を記述する*5)．

ここまでの議論は抽象的であったが，C に具体的な座標を入れると演算子 $\hat{\varphi}_M$ を具体的に書くこともできる．このとき，**量子ダイロガリズム関数**とよばれる特殊関数が現れ，Z_M が M の分解の仕方に依存しないことは量子ダイロガリズム関数の恒等式によって保証され，その背後には**団代数**という一般的な数学的構造がある（中西氏の記

*3) この操作は物性系，例えば量子ホール効果の物理において重要な役割を果たす．

*4) この場合 M はリーマン面上の S^1 束になっている．より一般の M を得るには脚注 2 で述べた 3 点以上の積を用いる必要がある．

*5) M 上のチャーン・サイモンズ理論を境界の 2 次元面 C 上に制限すると，理論はリウビユ理論になることが知られている．これの数学的側面については中島氏の記事を参照．

事および文献4) を参照).

興味深いことに，全く同じ構造は4次元理論 T_C の中の（超対称性を半分保つ）粒子の束縛状態の研究にも現れ，それはカラビ・ヤウ多様体の不変量の**壁超え**とよばれる現象の数理と等価である．つまり，4次元理論の境界条件として現れる3次元理論の分類が，同じ4次元理論の中の粒子の束縛状態の分類と対応するのである[5]．さらに，ここで議論した4次元ゲージ理論 T_C については，ゲージ群が $SU(2)$ のとき，その境界条件のデータが4次元ゲージ理論そのものを逆に決定してしまうと言うことが知られている[6]．このように T_C の分類と T_M の分類は密接に関係している．

3. 場の理論を超えて

ここまでは場の理論をどう捉え直すかという問いに対する一つの答えをみてきた．しかし，これまで我々が扱ってきた定量的な量，例えば分配関数は理論一つ一つに対して定義された量である．それでは，場の理論を足し上げて母関数を考えることには意味はあるだろうか？

このことに関する一つの示唆は重力から得られる．多様体 M 上の理論はすでに述べたように3次元のチャーン・サイモンズ理論であるが，これは3次元重力と密接な関係にあることが知られている．重力の理論では時空自体が動的に変化するので異なる多様体に関する足し上げを考える必要がある．これは，ゲージ理論の言葉ではゲージ理論の足し上げに他ならない．

場の理論の標準的な記述に慣れた人間にとって，ゲージ理論を足し上げるという考えは突拍子のないもののように思える．しかし，超弦理論の枠内では次のように考えると自然に理解できる．ゲージ群として $U(N)$ を持つゲージ理論を考えると，これは超弦理論では N 枚のブレーンを重ね合わせることで実現される．ゲージ理論の立場からすると，N というのは固定された数である．しかし，超弦理論の中ではブレーンは力学的自由度を持つ対象である．ブレーンを新たに足したり，あるいは消滅させることは可能であり．それは N の値を増減する．

異なる N の値を関係づけるという思想は，近年可積分系の文脈で具体化された[7]．この設定では2次元の $\mathcal{N}=(2,2)$ 超対称ゲージ理論 $U(N)$ で L 個のフレーバーを持つものを考える．このとき，この理論の真空は長さ L，上向きスピン N 個のスピン $\frac{1}{2}$ XXX スピン鎖で記述されるというのがその主張である．このスピン鎖においてはスピンを上げたり下げたりする $SU(2)$ 対称性が存在するので，これは N の値の異なるゲージ理論（の真空）を関係づける $SU(2)$ 対称性の存在を意味する[*6]．実は，スピン鎖には $SU(2)$ のみならヤンギアンとよばれるより大きな対称性が存在しており，これは場の理論を別の場の理論に移す対称性が大きなものであり得ることを例示する．

以上，ある種の超対称ゲージ理論を統一的に理解する一つの視点を，主に位相的場の理論の公理に絡めて紹介してきた．それは低次元多様体の分解という豊かな数学と結びつくのみならず，場の理論のなす空間に作用する新たな対称性を示唆する．今，場の理論の概念そのものを再度考え直すことが求められているのではないだろうか？ 場の理論とは何であって，その広大な世界には何が待ちかまえているのか，その探求は今も続いている．

*6) 数学的にはこれは幾何的表現論とよばれるものと関係しており，グラスマニアン多様体のコホモロジーの間に $SU(2)$ の作用を定義できることを意味している．

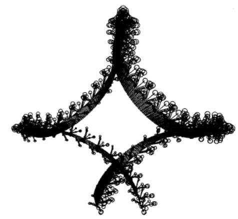
参考文献

1) M.R. Douglas, arXiv:1005.2779 [hep-th].
2) Y. Terashima and M. Yamazaki, *JHEP* **1108**, 135 (2011) [arXiv:1103.5748 [hep-th]].
3) M. Atiyah, *IHES Publ. Math.* **68** (1988); G. Segal, *London Math. Soc. Lecture Note Ser.* **308**, Cambridge, 2004.
4) 長尾健太郎，「3次元 Calabi–Yau 圏と量子 dilog 関数」，数理科学 2012年1月号.
5) S. Cecotti, C. Cordova and C. Vafa, arXiv:1110.2115 [hep-th].
6) S. Cecotti and C. Vafa, arXiv:1103.5832 [hep-th].
7) N.A. Nekrasov and S.L. Shatashvili, arXiv:0908.4052 [hep-th].

（やまざき・まさひと，プリンストン大学）

4次元ゲージ理論と2次元共形場理論

AGT予想の数学的背景



中島 啓

1. はじめに

AGT（Alday–Gaiotto–立川）予想[1]は，$N = 2$ の4次元超対称性ゲージ理論の分配関数が，2次元共形場理論のある相関関数に等しい，という主張です．登場人物の一人，ゲージ理論の分配関数は，Nekrasov の分配関数とよばれているもので，$\mathbf{R}^4$ 上の接続のインスタントン解のモジュライ空間を用いることによって，数学的に厳密に定義することができるものです[*1]．

もう一方の登場人物，2次元共形場理論の相関関数も数学的に厳密に定義することができるもので，したがって分配関数と相関関数が等しい，という主張は，数学の予想と考えることができることになります．

このように書くと，当り前なのではないか，と思われるかもしれませんが，物理学者が取り扱っている分配関数が数学的に厳密な定義を持つ，というのは，決して自明なことではないのです．例えば，Nekrasov の分配関数を，ある変数に関して展開したときの第一項は，ゲージ理論のプレポテンシャルとよばれていたもので，物理学者は長らく研究していたものでした．しかし，それに数学的に厳密な定義が与えられたのは，Nekrasov の分配関数として，高次の項まで考えることによって初めて可能になったのです．このように分配関数に数学的に厳密な定義を与えることは，全く自明なことではなく，例えば超対称性がないゲージ理論の分配関数を定義することは，クレイ研究所のミレニアム懸賞問題の一つになっています．

物理学者が，二つの量 A と B が等しい，$A = B$ であると主張したとしても，それが数学の予想となるためには，A と B の両方に数学的に厳密な定義が与えられないといけません．また物理的な立場から見ても，数学的に厳密な定義がある量のほうが，そうでないものよりも，より精密な深いところまで理論を調べていると考えられます．AGT予想は，そのような例になっているわけですが，そのことだけでも，大きな意義があると思います．

次に，純粋に数学の予想と思ったとき，AGT予想の意義はどこにあるでしょうか？ それは，4次元の理論と2次元の理論という，一見何も関係のない二つをつないでいるということにあります．

それが，どれほど驚くべきことなのかを説明するために，AGT予想の物理的な背景を，説明します[*2]．山崎さんの記事に出てきた6次元の $(2,0)$ 理論を，$\mathbf{R}^4$ と（点付き）リーマン面 C の積の上で考えます．このとき，$(2,0)$ 理論は，$\mathbf{R}^4$ の上に立って見ると，$N = 2$ の超対称性を持つ4次元ゲージ理論として見えてきて，C の上に立って見ると2次元共形場理論と見えます．しかし，もともとは同じ6次元の理論なので，両者は等価である，というわけです．

6次元の $(2,0)$ 理論は，物理としても非常に難しい理論で，残念ながら数学的にアプローチすることは，今のところできません．現時点では，4次元ゲージ理論と2次元共形場理論の両者をそれぞれ別に計算して，答えが同じ，という方針で証明するより他に方針がない，という状況です．つまり，数学としては，なぜつながっているのかその理由は分からないが，答えを求めてみると同じであることだけが分かる，というわけです．

ただ，4次元ゲージ理論への数学的なアプローチの一つの優位点として，Nekrasov の分配関数だけでは

*1） Nekrasov の分配関数については，以前に書いた記事[6]をご覧ください．

*2） ただし，受け売りですので，私が理解したときに間違いが紛れ込んだ可能性があります．

なく，インスタントンのモジュライ空間の同変ホモロジー群の構造を調べることが可能になるという点があります．Nekrasov の分配関数は，同変ホモロジー群の中でモジュライ空間の基本類を考え，そのノルムの母関数と捉えられます．AGT 予想は，この同変ホモロジー群が，2 次元の共形場理論に現れる W 代数という無限次元代数の表現空間の構造を持っていることを予想します．分配関数の対応だけでなく，それが住んでいるベクトル空間の間にも関係があるというわけです．そのように見ることによって，より豊富な構造が見て取れ，つながり方の具合をさらに深化させることになる，と期待されます．

インスタントンのモジュライ空間のホモロジー群に，共形場理論に関係した代数の表現空間の構造を与える，というのは，私がここ 20 年近くに渡って続けている研究テーマであり，AGT 予想はその例の一つであると考えられます．特に，このようにして代数が得られると，ホモロジー群に関する様々な幾何学的手法を用いてその代数の構造を研究することが可能になります．このような手法は，最近では**幾何学的表現論**とよばれていて活発な研究分野となっています．Beilinson–Bernstein と，Brylinski–柏原によって解決された Kazhdan–Lusztig 予想が，その典型例であり，旗多様体の上の D 加群のコホモロジーが，リー環 $\mathfrak{g}$ の普遍展開環になっているということから，$\mathfrak{g}$ の表現に関する重要な帰結が，幾何学的な手法によって証明されたのでした．

ただし，幾何学的表現論は，代数と幾何学的対象の間の関係が分かってから初めて，その威力を発揮する道具です．代数から出発して対応する幾何学的な対象は何であるか見つけるのが，Kazhdan–Lusztig 予想の場合のように見やすい場合はよいのですが，なかなかそうはいかない場合もあります．今までに私が成功してきた研究では，幾何学的な対象から出発していたのですが，対応する代数が何であるのか，いろいろな特別な場合や類似の状況で知られている結果を見ながら，手探りで調べていました．AGT 予想のように，それが何であるか，ただちに予想がつくのは，大きな驚きでした．物理的には，6 次元の理論を通じて初めて関係が見えてくるのですから，数学で簡単には見つからなくて当然です．

そこでこの記事では，今までの研究でインスタントンのモジュライ空間のコホモロジー群について分かってきたことを振り返りながら，現時点で AGT 予想について分かっていることまでを解説したいと思います．

2. アファイン・リー環

インスタントンのモジュライ空間のホモロジー群の構造について説明する前に，2 次元共形場理論側に登場する代数について説明したいと思います．先に述べたように，AGT 予想の場合にはそれは W 代数ですが，まずより簡単なアファイン・リー環から始めたいと思います．

有限次元複素単純リー環 $\mathfrak{g}$，例えばトレースが 0 の $N\times N$ 複素行列の全体 $\mathfrak{sl}(N)$ を考えます．その有限次元表現を調べることは，20 世紀の初頭から研究されてきた，いわば現代数学の中の古典的な分野です．アファイン・リー環は，このような有限次元複素単純リー環の理論を無限次元に拡張する，という目的の中で 60 年代頃から活発に研究されてきたリー環です．定義を簡単に復習します．上の $\mathfrak{g}$ から出発して，$\mathfrak{g}$ を係数に持つ一変数 z のローラン多項式の全体 $\mathbf{L}\mathfrak{g}$ を考えます．このとき，リー括弧を $[X\otimes z^m, Y\otimes z^n]=[X,Y]\otimes z^{m+n}$ によって定義することにより，自然にリー環の構造が入ります．ここで X, Y は，$\mathfrak{g}$ の元です．これに中心元 c を付け加えた $\widehat{\mathfrak{g}}=\mathbf{L}\mathfrak{g}\oplus\mathbb{C}c$ に，

$$\begin{aligned}&[X\otimes z^m, Y\otimes z^n]\\&=[X,Y]\otimes z^{m+n}+m\delta_{m,-n}(X,Y)c\end{aligned}$$

によって，リー括弧を定義したものが，アファイン・リー環です．ここで，(X,Y) は，$\mathfrak{g}$ の上に定義される内積で，ある条件を課すとそのようなものがただ一つ定まることが分かっていて，例えば $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(N)$ のときには，$\mathrm{tr}(XY)$ になります（正確には，この他に，捻れアファイン・リー環とよばれるものもあります）．

最も簡単なアファイン・リー環の例*3) として，$\mathfrak{g}$ を自明な 1 次元リー環に取ってみます．リー括弧は，0 になっているわけです．このとき，対応する $\widehat{\mathfrak{g}}$ は，**ハイゼンベルグ代数**とよばれています．$[a_m,a_n]=m\delta_{m,-n}c$（$(X,X)=1$ となる X を取り，$X\otimes z^m$ を a_m で表した）が，整数 n でパラメトライズされる無限個の粒子に関する正準交換関係と考えることができるので，そのような名前が付けられています．

アファイン・リー環の表現の中で，正レベル可積分表現とよばれる重要なクラスがあります．有限次元リー環

*3) アファイン・カルタン行列に対するカッツ・ムーディー・リー環として，アファイン・リー環を定義すると，例とはならないので，文献によってはハイゼンベルグ代数をアファイン・リー環に入れないこともあります．

の，有限次元表現の自然な拡張と考えられ，多くの研究があり，また共形場理論でも大きな役割を果たします．例えば，上のハイゼンベルグ代数の可積分表現の例を作りましょう．無限個の変数の多項式の環 $\mathbf{C}[x_1, x_2, \cdots]$ を考えます．このとき a_n を n が負のときに x_{-n} を掛けるという作用素，n が正のときに $n\partial/\partial x_n$ という作用素と定めると，$c = 1$ で上の関係式を満たすことがただちに従います．このハイゼンベルグ代数の表現を**フォック表現**といいます．

次に，アファイン・リー環，例えば $\widehat{\mathfrak{sl}(N)}$ の表現を作ります．H_i を，$N \times N$ の対角行列で，第 i 成分が 1，第 $i+1$ 成分が -1 のものとします．$H_1, \ldots, H_{N-1}$ は，$\mathfrak{sl}(N)$ の中の対角行列の全体のなすカルタン部分環の基底になっています．このとき，アファイン・リー環の元たち $H_i \otimes z^m$ $(i = 1, \ldots, N-1,\ m \in \mathbf{Z})$ を考えると，交換関係 $[H_i \otimes z^m, H_j \otimes z^n] = 2m\delta_{m,-n}c$ を満たし，先ほどのハイゼンベルグ代数を $N-1$ 個テンソル積を取ったものになっていることが分かります．もしも $\widehat{\mathfrak{sl}(N)}$ の表現があれば，このハイゼンベルグ代数の表現があることが分かります．逆に，ハイゼンベルグ代数の表現が与えられたとき，例えばフォック表現や，そのテンソル積から出発して，$\widehat{\mathfrak{sl}(N)}$ の表現を作ることができないか，と考えるのは自然な発想です．実際にそれは可能で，他の $N \times N$ 行列 X に対応する $X \otimes z^m$ は，上の $H_i \otimes z^m$ を組み合わせて作ることができることが分かっていて，**頂点作用素**とよばれています．

アファイン・リー環の可積分表現の顕著な性質の一つとして，指標の保型性があげられます．先ほどのハイゼンベルグ代数のフォック表現 $\mathbf{C}[x_1, x_2, \cdots]$ において $\deg x_i = i$ として次数を定義し，次数が n の元たちからなる部分空間 $V(n)$ を考えて，その次元の母関数 $\sum_{n=0}^{\infty} q^n \dim V(n)$ を取ります．すると，$\dim V(n)$ が n の分割数で与えられることに注意して

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \dim V(n) = \prod_{d=1}^{\infty} (1 - q^d)^{-1}.$$

これは，本質的にデデキントの η 関数で，$q = e^{2\pi i\tau}$ と表したときに，τ と $-1/\tau$ の値の間に関係があり，保型性を持つことがよく知られています．これは，より複雑なアファイン・リー環の可積分表現についても成り立つことで，指標をトーラスの上の共形場理論の相関関数であると理解することによって，τ はトーラスの周期であるので保型性を持つのだ，というのが幾何学的な説明です．

3. ヒルベルト概型とハイゼンベルグ代数

今までの研究を振り返ると書きましたが，歴史的な順序とは変えて，まずは一番基本的なハイゼンベルグ代数とそのフォック表現を，4 次元のゲージ理論で構成する話をしたいと思います．

$\mathbf{R}^4$ 上の $U(1)$-主束の上のインスタントンのモジュライ空間を考えます．ここで，一つ注意が必要で，それが心理的な障害となって，歴史的には順序が逆になった理由なのですが，普通に $U(1)$-主束上でインスタントン方程式の解を考えると，自明な解しかなく，モジュライ空間は一点になってしまいます．正しい答えは，インスタントン解のモジュライ空間の代わりに，$\mathbf{R}^4 = \mathbf{C}^2$ を通じて，代数幾何で対応する対象，点のヒルベルト概型を考えることで，雑にいうと有限個の点に特異点をもった解を許して，モジュライを考えることになります．このとき，点の個数 n に応じてヒルベルト概型 $M(n)$ が定まります．

私は，95 年頃に，コホモロジー群の直和

$$\bigoplus_n H^*(M(n))$$

にハイゼンベルグ代数のフォック表現の構造を幾何学的に実現できることを発見しました[5)]．その構成は，次のようなものです．点の数が n 個だけ異なるヒルベルト概型の積 $M(m) \times M(m+n)$ を考えます．その上のコホモロジー類 K が与えられると，作用素 $H^*(M(m)) \to H^*(M(m+n))$ が

$$\alpha \mapsto \int_{M(m)} \alpha \wedge K$$

によって定義されます．$\int_{M(m)}$ は，積 $M(m) \times M(m+n)$ の上で $M(m)$ の方向だけを積分することを表します．K は，どんなものでもよいのですが，$M(m) \times M(m+n)$ の場合には，自然に現れるものとして，$(I_1, I_2) \in M(m) \times M(m+n)$ の組で，I_1 と I_2 の差が一つの点に重複度 n で集中しているようなものの全体のなす $M(m) \times M(m+n)$ の部分多様体のポアンカレ双対があります．これに対応する作用素を a_{-n} とおきます．定義域と値域を逆にして，$H^*(M(m+n)) \to H^*(M(m))$ が定義される[*4)]ので，

*4) 正確にいうと，積分の発散を防ぐために，集中している点が原点にあるものだけを考えないと，うまく定義されません．

それを a_n とおきます．このとき私が証明したのは，a_m たちが，$c=1$ でハイゼンベルグ代数の関係式を満たしているということでした．その以前から，$H^*(M(m))$ の次元は計算されていて，フォック表現のウェイト空間の次元と等しいことが知られていましたので，これと合わせて $\bigoplus H^*(M(n))$ がフォック表現に他ならないことが従います．

このように二つの多様体の積の上のコホモロジー類を用いて造られる作用素は，**合成積**とよばれ，以下に説明する構成はすべて，この手法を用いています．$M(m+n)$ から $M(m)$ への写像 f があれば，引き戻しとしてコホモロジーの間の作用素 $H^*(M(m)) \to H^*(M(m+n))$ が定まることは，コホモロジー理論の基本ですが，f のグラフのポアンカレ双対を K として取ると，上の合成積は引き戻し写像に一致します．このように合成積は，引き戻しの一般化ですが，写像よりも積の上のコホモロジーのほうがずっと作りやすいので，代数の表現の構成には役に立ちます．

ここで，序でも述べたことですが，ハイゼンベルグ代数とヒルベルト概型が関係することは全く明らかでなかったことを注意したいと思います．上で述べたようにハイゼンベルグ代数の生成元 a_n を与えるコホモロジー類 K は自然なものですが，それがハイゼンベルグ代数の関係式

$$[a_m, a_n] = m\delta_{m,-n}\mathrm{id}$$

を満たすことは，計算してみてそうなったという説明しかありません．ましてや，ハイゼンベルグ代数を $\mathbf{C}^*$ 上の多項式の全体の中心拡大と考えると，その $\mathbf{C}^*$ はヒルベルト概型の中に見出すことができません．

$H^*(M(n))$ の次元の母関数

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \dim H^*(M(n))$$

は，2 節の最後に計算した $\prod_{d=1}^{\infty}(1-q^d)^{-1}$ に等しく，特に保型性を持ちます．この性質は，4 次元ゲージ理論として $M(n)$ を捉えている限り，どこから来ているのか分かりませんが，序の最後に述べた 6 次元理論を使うと，C としてトーラスを取ってくることに対応し，そのトーラスの周期が q として見えているのだというのが，物理的な説明です．

4. アファイン・リー環と ALE 空間上のゲージ理論

複素特殊線形群 $SL(2,\mathbf{C})$ の有限部分群 Γ は，共役を除き，巡回群，二項正二面体群，二項正多面体群と分類され，A_n, D_n, E_6, E_7, E_8 型のディンキン図式と対応することは昔からよく知られていました．商空間 $\mathbf{C}^2/\Gamma$ の原点における特異点は，**単純特異点**もしくは，**クライン型特異点**とよばれていて，対応するディンキン図式で与えられる複素単純リー環 $\mathfrak{g}$ と密接な関係があることが知られています．

80 年代後半に Kronheimer という人が，$\mathbf{C}^2/\Gamma$ を特異点解消した空間 X が，超ケーラー計量という非常によい性質を持つリーマン計量を持つことを証明しました．Γ が A 型のときの，江口–Hanson，Gibbons–Hawking や Hitchin の構成を，一般の Γ に拡張したものです．この計量は，$\mathbf{C}^2/\Gamma$ の標準的なユークリッド計量に無限遠に近づくに従って，どんどん近づいてきますので，X は **ALE**（**asymptotically locally Euclidean**）**空間**とよばれています．

超ケーラー構造を持つ 4 次元多様体上では，接続のインスタントン方程式が通常の 4 次元多様体のときよりも，ずっとよい性質を持つことがよく知られています．そこで，私は ALE 空間の上のインスタントンの，特にそのモジュライ空間の構造に注目しながら，研究を始めました．1989 年に Kronheimer との共同研究で，モジュライ空間を，箙という代数的な対象で記述する方法を発見したのもこのときですが，さらに精密な構造が分かってきたのは，92 年頃で，Ringel や Lusztig の箙の表現の研究に示唆されて，モジュライ空間のホモロジー群にアファイン・リー環 $\widehat{\mathfrak{g}}$ の表現の構造を定義できることに気が付きました[4)]（正確にいうと，当時はホモロジー群の代わりに，モジュライ空間の上の構成可能関数の全体に表現を作りました．ホモロジー群の上に定義したのは数年後です）．インスタントンのモジュライ空間は，チャーン類を定義するごとに決まりますので，無限個現れますが，表現が構成されるのは，すべてのホモロジー群の直和であり，一つ一つを見ている限りは，そのような構成をすることはできません．一つ一つのモジュライ空間のホモロジー群は，表現のウェイト空間になっています．特にアファイン・リー環の元は，一般には，あるモジュライ空間のホモロジー群の元を，別のモジュライ空間のホモロジー群に移します．ヒルベルト概型のときと同様です．

このように，たくさんの空間を一度に考えることによって，構造が見えてくる，ということは，Ringel や Lusztig の研究ですでに見えていたとはいえ，インスタントンのモジュライ空間のような極めて自然に現れる空間に，そのような構造が隠されていたことは，驚きでした．

先の節の $\mathbf{R}^4 = \mathbf{C}^2$ は，$\Gamma = 1$ に対応しますので，対応するリー環 $\mathfrak{g}$ は自明なものであり，アファイン・リー環はハイゼンベルグ代数となります[*5)]．歴史的には，$\Gamma \neq 1$ の場合を最初に示しました．

このあとさらに研究を進め，ALE 空間の上のインスタントンのモジュライ空間のコホモロジー群（正確には同変 K 群）には，アファイン・リー環 $\widehat{\mathfrak{g}}$ よりもずっと大きな，量子トロイダル代数とよばれる無限次元代数が作用していることを発見しました．これは，だいたいアファイン・リー環 $\widehat{\mathfrak{g}}$ にもう 1 個新たな変数 w を付け加えたものを‘量子変形’したもので，特に可解格子模型の研究に現れる，量子アファイン代数を中に含みます．量子アファイン代数の表現になっている部分だけを取ってくることは，ゲージ理論のほうでいうと，インスタントン数がある範囲（有限個）にあるときしか考えないことに対応します．その場合を調べるだけでも，量子アファイン代数の表現論の，それまでの代数的手法だけでは証明することができなかった様々な結果を証明することができ，思いもかけなかった応用でした．

5. ビラソロ代数とトートロジカル・ベクトル束

アファイン・リー環の親戚として，ビラソロ代数とよばれる無限次元リー環があります．これは，複素平面から原点を除いた $\mathbf{C}^*$ 上の正則ベクトル場の全体のなすリー環を中心拡大したもので，生成元は $z^{-n+1}\partial/\partial z$ に対応する L_n $(n \in \mathbf{Z})$ と中心元 c で，関係式

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}(m-1)m(m+1)\delta_{m,-n}$$

*5）技術的なことを少しいうと，前節のハイゼンベルグ代数の構成と，今回のアファイン・リー環の構成は，よく似ているところはあるものの，大きな違いがありました．それは，アファイン・リー環を 2 節のように $L\mathfrak{g}$ の中心拡大と捉える代わりに，有限個の生成元と関係式で記述されるカッツ・ムーディー・リー環の例として構成したことです．そのためにチェックすべき関係式の個数が有限個になって，証明が簡単でした．

で定められるものです．アファイン・リー環は，$\mathbf{C}^*$ からリー環 $\mathfrak{g}$ への多項式写像の全体の中心拡大ですから，アファイン・リー環とビラソロ代数の間には何らかの関係があることが期待されます．実際，これは正しく**菅原構成**とよばれるもので作られることが知られています．

菅原構成を，3 節で説明したヒルベルト概型のコホモロジー群上のフォック表現の場合に適用すると，ハイゼンベルグ代数だけではなく，ビラソロ代数も作用していることになります（この場合は，中心元は 1 で作用します）．具体的には，生成元 L_n は

$$L_n = \frac{1}{2}\sum_{m\in\mathbf{Z}} :a_m a_{n-m}:$$

とハイゼンベルグ代数の生成元を無限個使った和で表されます（: : は正規積とよばれるもの，定義は省略します）．

しかし，ヒルベルト概型を見ている限り，$\mathbf{C}^*$ から $\mathbf{C}$ への写像の全体との関係は分かりませんので，正則ベクトル場とヒルベルト概型の間にどのような幾何学的な関係があるのかは，明らかではありません．また，上の式に，a_n が $M(m)\times M(m+n)$ の積の上のコホモロジー類 K_n であるという 3 節の実現を代入してみても，L_n の幾何学的な意味はサッパリ伝わってきません．

この問題を解決したのが，98 年の Lehn の研究[3]です．ヒルベルト概型 $M(n)$ の上には，**トートロジカル・ベクトル束**とよばれる階数が n のベクトル束 V があります．$M(n)$ のある点におけるファイバーは，その点がインスタントン接続であると思うと，ディラック作用素の解のなす線形空間になり，指数定理からその次元が n である，ということになります．そこで，V の第一チャーン類 $c_1(V)$ をコホモロジーの元に掛けるという作用素

$$c_1(V)\cup\colon H^*(M(n)) \to H^*(M(n))$$

を考えます．このような作用素は，前に説明した合成積の K として，$M(n)\times M(n)$ の上の対角線集合の上に $c_1(V)$ を載せたものと考えられますが，もっと簡単にコホモロジー環の積構造だけを使って定義されますので，ヒルベルト概型の幾何の意味では，ハイゼンベルグ代数の生成元よりも簡単な構造を取り扱っていることになります．Lehn が証明したのは，$c_1(V)\cup$ とハイゼンベルグ代数の生成元 a_n の交換子 $[c_1(V)\cup, a_n]$ と，ビラソロ代数の生成元 L_n がほぼ等しいというものです．Lehn は差もきちんと計算していますが，ここでは省略します．

菅原構成も，前にアファイン・リー環の構成に使った頂点作用素も，共形場理論では，極めて基本的なものですが，その意味を 4 次元ゲージ理論の立場から理解しようとすると，よく分からない，というのが現状です．トートロジカル・ベクトル束は，$M(n)$ の幾何では重要な対象であることは間違いないのですが，なぜそれがビラソロ代数の生成元に対応しているのか，計算してみるとそうなった，というのが我々の理解の現状です．

6. AGT 予想

3 節で紹介したハイゼンベルグ代数の生成元 a_n は，より一般に $U(N)$-インスタントンのモジュライ空間 $M(m,N)$（正確には，その代数幾何での対応物である，捻れのない連接層のモジュライ空間）でも意味をもち，そのコホモロジー群には，ハイゼンベルグ代数の表現の構造が入ります[2]．しかし $N>1$ のときには，コホモロジーの次元の母関数は，

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \dim H^*(M(n,N)) = \prod_{d=1}^{\infty}(1-q^d)^{-N}$$

となることが分かるので，ハイゼンベルグ代数が N 個ないと，次元が合いません．

$\Gamma\neq 1$ の場合は，4 節の最後に紹介した量子トロイダル代数で，インスタントンのホモロジー群が完全に統制されます．しかし，不思議なことに，より簡単そうに見える $\Gamma=1$ の場合のほうが，構造が少ないためか，対応する代数が何であるのか，分かりませんでした．正しい代数は N 個のハイゼンベルグ代数のテンソル積ではなく，W 代数である，ということは，私は AGT 予想を聞いて初めて知りました．W 代数の定義をここで与えることは致しませんが，一番簡単で，自明でない $N=2$ の場合には，上に紹介したビラソロ代数とハイゼンベルグ代数の積になります．

この AGT 予想は，$U(N)$-インスタントンのモジュライ空間の場合に，Maulik–Okounkov や，Schiffmann–Vasserot の研究があり，詳細は検討中でしょうが，解決されました．トートロジカル・ベクトル束 V のチャーン類を掛ける作用素と，ハイゼンベルグ代数で，W 代数が作られることになるのですが，W 代数の定義関係式は，ビラソロ代数の場合以外は極めて複雑なので，これを直接チェックすることは不可能です．そこで，

Maulik たちの証明のアイデアは，次のようになります．

上の次元を勘定するときの議論にも使うのですが，$M(m,N)$ の中には，ヒルベルト概型の積 $M(m_1)\times\cdots\times M(m_N)$ $(m_1+\cdots+m_N=m)$ が入っていることが分かります．しかし，包含写像がコホモロジーに誘導する写像は同型ではないので，積のほうで安直に考えた N 個のハイゼンベルグ代数の積の表現を，$\bigoplus_m H^*(M(m,N))$ に移すことはできません．そこで，よりきちんと，ヒルベルト概型の積のコホモロジーと，$M(m,N)$ のコホモロジーの間の関係をきちんと理解する必要が出てきます．その関係が，共形場理論の側では，フォック空間の中に W 代数が入っているという結果に対応していることを示すことが，証明の中心になります．共形場理論側では，これは，W 代数の遮蔽作用素による特徴付けというものであり，極めて重要な性質です．

また，4 節の最後に述べた量子アファイン代数の表現論に対応する場合に，この構造を調べてみると，表現のテンソル積と密接に関連していることも分かります．一般に，量子アファイン代数の二つの表現 V, W のテンソル積 $V\otimes W$ は，リー代数の表現の場合と異なって，順序に依存しており，$W\otimes V$ とは一般には同型になりません．これは，量子アファイン代数の表現を面白くしている極めて重要な性質であり，それが 4 次元のゲージ理論にも反映しているのは，大変興味深いものです．

私は，この証明で現れたように，AGT 予想による 4 次元ゲージ理論と 2 次元共形場理論の対応において，それぞれの分野で自然に現れる重要な概念の間に関係がつくと期待しています．

今まで，2 次元側ではよく知られていたことを紹介してきましたので，逆に 4 次元側で知られているが，2 次元側では知られていないことを紹介して終りたいと思います．私は，以前の Nekrasov の分配関数の研究において，$\mathbf{R}^4$ の上のインスタントンと，原点でブローアップした空間の上のインスタントンのモジュライ空間の間に，関係があることを指摘しました．特にその応用として，Nekrasov の分配関数がある関数方程式（ブローアップ方程式）を満たし，その性質が Nekrasov の分配関数を特徴付けることを証明しました．2 次元側にも対応するような構造があるのではないか，と期待するのは自然であると考えています．

参考文献

1) L.F. Alday, D. Gaiotto, and Y. Tachikawa, Liouville correlation functions from four-dimensional gauge theories, *Lett. Math. Phys.* **91** (2010), no.2, 167–197.

2) V. Baranovsky, Moduli of sheaves on surfaces and action of the oscillator algebra, *J. Differential Geom.* **55** (2000), no.2, 193–227.

3) M. Lehn, Chern classes of tautological sheaves on Hilbert schemes of points on surfaces, *Invent. Math.* **136** (1999), no.1, 157–207.

4) H. Nakajima, Instantons on ALE spaces, quiver varieties, and Kac-Moody algebras, *Duke Math. J.* **76** (1994), no.2, 365–416.

5) ———, Heisenberg algebra and Hilbert schemes of points on projective surfaces, *Ann. of Math.* (2) **145** (1997), no.2, 379–388.

6) 中島 啓，4 次元ゲージ理論の新展開—Nekrasov の分配関数，別冊・数理科学「現代幾何学の発展」，2010 年 4 月，155–163.

（なかじま・ひらく，京都大学数理解析研究所）

混成弦・II 型弦双対性の一側面



立川 裕二

1. はじめに

超弦理論（superstring theory）は，その 30 年弱の歴史の間に数学の新しい方向をいろいろと示唆してきました．そのようなことが可能であった根本は，超弦理論の**双対性**（duality）にあります．超弦理論とは，数学的には，与えられた 10 次元時空に対して，弦の結合定数と呼ばれる正の実数 g を 1 パラメタにもつ量子系を与える手続き $P(g)$ として定式化されるべきものです：

$$\begin{array}{ccc} \{10\text{ 次元多様体} + \alpha\} & \to & \{\text{ 量子系 }\}, \\ X & \mapsto & P(g)[X]. \end{array} \tag{1}$$

パラメタ g は，単位時間あたりに弦が 2 つに千切れる確率を決めていると思ってくださればよいでしょう．g が小さいと弱結合，g が大きいと強結合と呼ばれます．この手続き P がどのような条件を満たすべきかは数学的に厳密には書き下されていませんが，弦理論の研究者が矛盾に出くわすことなく仕事ができる程度には理解されています．80 年代半ばの重要な結果は，このような手続きには 5 種類（IIA 型，IIB 型，I 型，$SO(32)$ 混成，$E_8 \times E_8$ 混成）があり，それに尽きるということです．これらを $P_{\mathrm{IIA}}, P_{\mathrm{IIB}}, P_{\mathrm{I}}, P_{SO(32)}, P_{E_8\times E_8}$ と書くことにしましょう．これらは正確には 10 次元多様体 X に対して定義されるものですが，X の次元 d が 10 以下の場合も，$\mathbb{R}^{10-d} \times X$ を考えられますので，そのような場合は以下簡単のため

$$P(g)[X] = P(g)[\mathbb{R}^{10-d} \times X] \tag{2}$$

と定義することにしましょう．

80 年代後半には，異なる多様体 M，W に対して対応する量子系が同じになる，すなわち

$$P_{\mathrm{IIA}}(g)[M] = P_{\mathrm{IIB}}(g)[W] \tag{3}$$

となることがしばしば起こることが判りました．量子系はとてもたくさんの情報を含んでおり，その中からいろいろな内容を取り出すことができます．それらを，空間 X に対して一般に $A(X)$，$B(X)$ と書くことにします．簡単な場合では $A(X)$ は X の体積，$B(X)$ は X の形の歪みの尺度と思えばいいでしょう．そうすると，上式の結果として，

$$A(M) = B(W) \tag{4}$$

なる関係式が従います．これを追求して 90 年代初頭に得られたものがいわゆるミラー対称性で，本誌にもこれまで何度も解説がありましたし，今号にも載っています．異なる空間 M，W で異なる量 A，B を計算するとなぜか同じになってしまうのですから，数学者が驚いたのもむべなるかな．同様に多様体 X，Y を適切に選べば，2 種の**混成弦理論**（heterotic superstring theory）が一致することも判明しました：

$$P_{SO(32)}(g)[X] = P_{E_8\times E_8}(g)[Y]. \tag{5}$$

関係 (3), (4) は弦理論では T-双対性と呼ばれます

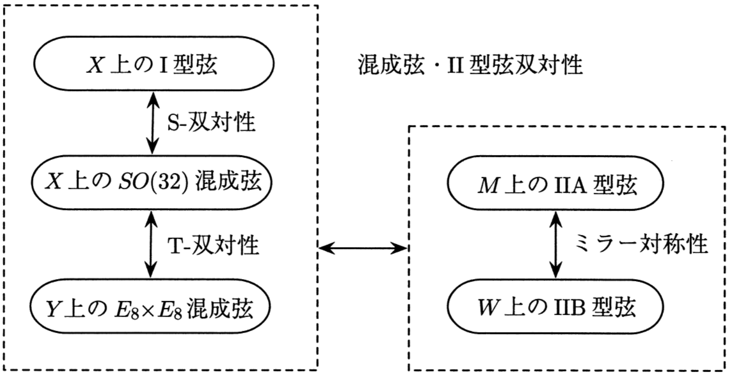


図 1 弦理論の双対性の網.

が，ミラー対称性と同義だと思ってくださって結構でしょう．

超弦理論は 90 年代半ばにさらなる進展がありましたが，その第一は S-双対性と呼ばれる以下の関係式です：

$$P_{SO(32)}(g)[X] = P_{\mathrm{I}}(g^{-1})[X]. \qquad (6)$$

関係式 (3), (4) との大きな違いは，空間 X が両辺で同じである代わりに，結合定数 g が左辺と右辺で逆数になっている点です．弦理論では通常 $P(g)$ は g に関する冪展開でしか計算できませんから，このように逆冪による展開が可能であるというのは大きな衝撃でした．強結合と弱結合を入れ替えるので，この関係式は強弱双対性と呼ばれます．対して，関係式 (3), (4) は弱弱双対性とも呼ばれます．さらに，混成弦・II 型弦双対性と呼ばれる関係式も発見されました：

$$P_{E_8\times E_8}(g)[Y] = P_{\mathrm{IIB}}(g')[W]. \qquad (7)$$

ここに至りますと，両辺の結合定数 g, g' の関係は多様体 Y および W の情報に依存するため，一言では表すことができません．以上の関係式 (3), (5), (6), (7) を組み合わせると，5 種の弦理論が適切に時空と結合定数を選ぶと量子系として等しくなるという結論になります．これが所謂「弦理論の双対性の網」です．図 1 を参照ください．

さて，ミラー対称性 (4) は数学者を魅了して 20 年になろうとしますが，弦理論の立場からは，それは弱弱対称性 (3) であり，両辺を冪展開して各項の一致を見ているに過ぎません．ですから，$P(g)$ の g 依存性の全体が問題となる 90 年代半ばの S-双対性および混成弦・II 型弦双対性からは，ミラー対称性より格段に深い数学的事実が取り出されて然るべきです．しかし，嘆かわしいことに，数学者の間で混成弦・II 型弦双対性が膾炙しているようには見えません．これは，数学者がミラー対称性が十分に面白いので満足してしまっているのもありましょうし，また，弦理論屋のほうが，90 年代半ば以降の発展があまりに急速であったため，時間を取って数学者に説明をするのを怠ってきたのもありましょう．以下では，混成弦・II 型弦双対性をもう少し詳細に解説したのち，そこから取り出せる数学的問題の非常に簡単な例を記述して，微力ながらもこの社会学的問題の解決の一助となればと願います．2012 年現在，弦理論の大発展は一段落していますので，この問題を解消するのにちょうど良い時期なのではないかと思っています．

2. 混成弦・II 型弦双対性

では，この双対性についてもうすこし詳しく見たいと思います．まず，一般に弦理論を考える際に，X として本当に数学的に多様体だけを与えられたのでは情報が足りません．まずは，X 上で長さを測るためにリーマン計量 G_X が必要です．計量があると長さが測れるだけでなく，ある点 p での接ベクトルを他の点 q まで平行移動することができます．さらに，$SO(32)$ 混成弦理論および I 型

弦理論の場合は，X 上の $SO(32)$ ゲージ場，数学的には X 上の $SO(32)$ 束の接続が，$E_8 \times E_8$ 混成弦理論の場合は同様に Y 上の $E_8 \times E_8$ ゲージ場が必要です．これらゲージ場/接続を A と書きましょう．$SO(32)$ の接続 A とは，ある点 p で与えられた 32 次元実ベクトルを，他の点 q まで平行移動するルールを与えるものです．これらの情報が，式 (1) の左辺につけておいた $+\alpha$ で表したかったもので，混成弦・II 型弦双対性 (7) などは，もう少し性格には

$$P_{E_8 \times E_8}(g)[Y, A] = P_{\mathrm{IIB}}(g')[W] \qquad (8)$$

などと書かれるべきものです．但し，式があまり煩雑になりますから，Y だけでリーマン多様体 (Y, G_Y) を表すことにしました．この式をみると，右辺に比べて左辺のほうに情報が多すぎるのが気になります．実はそうでないことを説明するために，リーマン多様体 X に対してそのホロノミー群を次のように定義します．

ある点 p で接ベクトル v を取り，これを p から出て p に戻る曲線 C 上で平行移動して戻しますと新たな接ベクトル $w = M_C v$ になります．平行移動は長さを保ちますから，X が d 次元とすると，M_C は d 次元の直交行列，すなわち $SO(d)$ の元になりますので，すべての C について M_C を考えると，$SO(d)$ の部分群 H を定めます，これをホロノミー群といいます．これは一般には $SO(d)$ そのものですが，X の計量によっては，小さくなりえます．例えば，X が完全に平坦なら，平行移動しても v は全く変わりませんから $M_C = 1$，よって自明な部分群 $H = \{1\}$ がホロノミーになります．また，$d = 2n$ ですと $H = SU(n) \subset SO(2n)$ になることがあり，これをカラビ=ヤウ多様体，$d = 4m$ ですと $H = Sp(m) \subset SO(4m)$ となるものがあり，これをハイパーケーラー多様体と言います．$H = 1$ なら完全に平ら，$H = Sp(d/4)$ なら 1/4 だけ曲がっている，$H = SU(d/2)$ だと半分だけ曲がっている，と思ってもいいかもしれません．これらを**特殊ホロノミー多様体**（special holonomy manifold）といいます．

これで，関係式 (8) に戻ることができます．一般に，Y のホロノミー群は M のホロノミー群より小さくないといけないのです．ある意味，Y の計量の曲がりの情報が M の計量の曲がりの情報より少ないので，その分がゲージ場の接続の情報に化けていると思うことができます．例えば，Y が 4 次元のトーラス T^4 で完全に平坦である場合，M は 4 次元のハイパーケーラー多様体で $K3$ と呼ばれるものになります．また，ミラー対称性で最も典型的な場合の，M が実 6 次元カラビ=ヤウ多様体である場合，Y は $T^2 \times K3$ という積であることが知られています．しかし Y には計量だけでなく，接続 A も M の計量に対応して決まっているわけです．

ミラー対称性の場合では，多様体 M に対してそのミラー W をどう決定するかが第一の問題ですが，この解決には長足の進歩があります．対応して，混成弦・II 型弦双対性の場合には，与えられた (Y, A) に対して W をどう決定するかが基本的問題です．(Y, A) の組の中でもなるべく簡単なものを考えますと，さらに問題は簡略化され，次の 2 つの問題を解くのが第一歩であることが知られています：**問題 1**．群 G を与えた際に，対応する実 4 次元の W を探すこと．**問題 2**．群 G とその表現 R の組を与えた際に，対応する実 6 次元の W を探すこと．弦理論の双対性の一般論から，これらの問題には解があることが保証されています．実際，問題 1 は，超弦理論以前，70 年代には数学で知られていた，群と幾何学の非常に美しい関係そのものです．ですから，問題 2 の背後にも自然な美しい数学があると筆者は信じていますが，一般的な解決にはまだ遠いようです．以下，次の節でまず問題 1 について解説した後，その次の節で問題 2 の解の実例を数個紹介したいと思います．

3. 群 G に対して幾何を決めること

まず群 $GL(N)$，すなわち行列式がゼロでない $N \times N$ 行列のなす群を考えます．対応するリー

環 $\mathfrak{gl}(N)$ は勝手な $N \times N$ 行列全体です．対角行列 $a = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_N)$ の $X \in \mathfrak{gl}(N)$ への作用

$$X \mapsto [a, X] \tag{9}$$

の固有状態が何かを考えましょう．これは簡単で，E_{ij} を i 行 j 列のみが 1 で他の要素が 0 の行列とすると，

$$[a, E_{ij}] = (a_i - a_j)E_{ij} \tag{10}$$

となるので，E_{ij} が固有ベクトルになります．a がなるべく一般の元であれば，固有値がゼロの元は N 個で，他の固有値 $a_i - a_j$ はすべて非ゼロです．ですから，$a_i = a_j$ となる場合の a はある意味特殊であるわけです．

$g \in GL(N)$ は $X \in \mathfrak{gl}(N)$ に自然に作用します：

$$X \mapsto gXg^{-1}. \tag{11}$$

特に g として $i \neq j$ に対して $M_{ij} = E_{ij} - E_{ji}$ とすれば，対角行列に作用させて a_i と a_j を入れ替えることができます．ですから，$a_1, \ldots, a_N$ の置換で不変なものを考えることにしましょう．そのためには，a_i から作った基本対称式 $u_1, \ldots, u_N$，さらにそれをまとめた多項式 $P(z)$ を考えるのが便利です：

$$\begin{aligned} P(z) &= \prod_{i=1}^{N}(z - a_i) \\ &= z^N + u_1 z^{N-1} + \cdots + u_N. \end{aligned} \tag{12}$$

いつ $a_i = a_j$ となるかは，この言葉では，いつ $P(z)$ が重根を持つか，ということですから，

$$P(z) = P'(z) = 0 \tag{13}$$

と表せます．さて，群 $GL(N)$ に対応する幾何 W は，答えを言ってしまいますと，

$$W_{GL}(x, y, z) = -x^2 + y^2 + P(z) = 0 \tag{14}$$

です．但し，$(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ は 3 つの複素数とします．方程式が一つあるので，複素 2 次元，実 4 次元の超曲面になります．幾何と群の対応は，「超

曲面 W に特異点があるとき，またそのときのみ，a の作用 (10) のゼロ固有値の数が増える」というものです．これはすぐに確認できます．なぜなら，超曲面に特異点がある条件は (14) かつ

$$\frac{\partial W}{\partial x}=\frac{\partial W}{\partial y}=\frac{\partial W}{\partial z}=0 \qquad (15)$$

ですが，x 微分と y 微分は単に $x=y=0$ とするだけで，実質 (13) になります．

次に群 $SO(2N)$，すなわち行列式が 1 で $gg^T=1$ なる $2N\times 2N$ 行列全体のなす群を考えます．対応するリー環 $\mathfrak{so}(2N)$ は $2N\times 2N$ 反対称行列のなすリー環です．$\mathfrak{gl}(N)$ の場合の対角行列に相当するのは，$a=(h_{ij})$ 但し

$$h_{2i-1,2i}=-h_{2i,2i-1}=\sqrt{-1}a_i, \qquad (16)$$

その他の要素はゼロ，としたものです．これについて (10) と同様に $[a,X]$ の固有値問題を考えますと，非ゼロ固有値は $\pm a_i\pm a_j$ 但し $i\neq j$，として与えられます．ですから，$a_i=\pm a_j$ のときにゼロ固有値の数が増えます．$SO(2N)$ による作用 (11) を考えますと，a_i の置換および偶数個の a_i に負号を付けることができますので，$GL(N)$ の場合の基本対称式に相当するものは，a_i^2 から作った基本対称式 $v_1,\ldots,v_N$，

$$\begin{aligned}Q(z)&=\prod_{i=1}^{N}(z+a_i^2)\\&=z^N+v_1z^{N-1}+\cdots+v_N, \qquad (17)\end{aligned}$$

および $w_N=a_1a_2\cdots a_N$ です．対応する幾何としては，安直には $x^2+y^2+Q(z)=0$ を取りたいところです．しかし，これが特異点を持つ条件を調べると，異なる i，j に対しての $a_i=\pm a_j$ だけでなく，当然ですが $a_i=0$ も得られてしまいます．正しくは，

$$\begin{aligned}W_{SO}(x,y,z)&=-zy^2-x^2+z^{N-1}\\&\quad+v_1z^{N-2}+\cdots+v_{N-1}+2w_Ny \qquad (18)\end{aligned}$$

とすればよいことが知られています．この W に対して条件 (15) を調べると，ちょうど $a_i=\pm a_j$ が得られるのは良い練習問題ですから，是非やってみてください．

超曲面 (14), (18) のように群に対応する幾何は例外群 $E_{6,7,8}$ についても書き下すことができます，具体形はこの号の渡利さんの記事にあるでしょうからそちらをご覧ください．これの超曲面 $W_G=0$ は数学では 19 世紀から知られており，クライン型特異点と呼ばれますが，これらが上記の通り群と対応しており，またここでは説明しませんでしたが対応する群の構造から自然に構成できるのは Brieskorn と Slodowy による著名な結果[1,2]です．また，これらの超曲面に自然にハイパーケーラー計量が入ることも後に示されました[3]．そこで，IIA 型弦理論をこれら超曲面 $W_G=0$ 上で考えることができますが，混成弦・II 型弦双対性によって T^4 上の混成弦理論に移すことができます．この際ゲージ接続 A のホロノミーと可換な $E_8\times E_8$ の部分群がちょうど G となり，そのため低エネルギー理論にゲージ群 G が生じる，というのが Witten の画期的な論文[4] によって明らかにされたことの一つです．

4. 群 G と表現 R に対して幾何を決めること

さて，作用 (9) はリー環の自分自身への作用でしたから，もっと一般に，他の既役表現への作用を考えてみましょう．例えば，N 次元ベクトルのなす表現 $V=\mathbb{C}^N$ に対して，$\mathfrak{gl}(N)$ の対角行列 $a=\mathrm{diag}(a_1,\ldots,a_N)$ の自然な作用を考えます．すると，当然ですが，固有値は a_i です．一つ数 m を固定して，いつ $a_i=m$ となるかを考えましょう．これは，多項式 $P(z)$ を用いては，$P(m)=0$ と表せます．これを実現する幾何はどうすればよいでしょうか？ 今回は 4 変数 $(t,x,y,z)\in\mathbb{C}^4$ に対し，

$$\widetilde{W}=t(z-m)+W_{GL}(x,y,z)=0 \qquad (19)$$

という式を課します．これが特異点を持つ条件

$$\frac{\partial\widetilde{W}}{\partial t}=\frac{\partial\widetilde{W}}{\partial x}=\frac{\partial\widetilde{W}}{\partial y}=\frac{\partial\widetilde{W}}{\partial z}=0 \qquad (20)$$

を調べますと，ちょうど $a_i = m$ となります．これを，複素3次元の超曲面 $\widetilde{W} = 0$ が $GL(N)$ の表現 V に対応する，ということとします．物理的には，この超曲面上でIIB型弦理論を考えると，混成弦・II型弦双対性によって混成弦側に表現 V で変換し質量が m である物質場が生ずる，ということになります．また，ほぼ同等ですが，G とその表現 V に対し上記の意味で対応する超曲面を決定することは，ゲージ群が G で物質場の質量が m，表現が V であるような $\mathcal{N} = 2$ 超対称ゲージ理論を Seiberg–Witten の意味で解くことである[5,6]，ということもできます．

次に，$G = SO(2N)$ に対し，$2N$ 次元ベクトルのなす表現 V' を考えましょう．対角行列に相当するのは (16) で定まる行列でしたから，これの作用の固有値を調べると，$\pm a_i$ であることがすぐに判ります．条件 $m = \pm a_i$ をどのような幾何で表せばよいかと考えますと，

$$t(z + m^2) + W_{SO}(x, y, z) = 0 \qquad (21)$$

を選べばちょうど良いことが計算をすればすぐに確かめられます．一般に，群 G と表現 R に対し，対応する幾何は

$$\widetilde{W} = tX_R(x, y, z) + W_G(x, y, z) = 0 \quad (22)$$

という形をしているはずであることが双対性を詳しく調べると判りますので，問題は X_R を決定することです．上記の議論より，$X_V = x - m$，$X_{V'} = x + m^2$ ですが，他の群，他の表現に対してはどうなるでしょう．

残念ながら，現時点では，たくさんの表現 R について X_R は知られている，ということしかできません．それらの X_R は，各 R に対して個別に，弦理論や場の理論の双対性を駆使して，多大な労力を費やして90年代後半に決定されました．一度決定されてしまえば，それらを (22) に代入し，(20) を調べるのは機械的な作業ですが，その結果がちょうど $m =$ (a の作用の固有値) となるのは，混成弦・II型弦双対性から保証されているとはいえ，弦理論屋にとっても不可思議なことです．これは前節で述べた，群とクライン型特異点の対応のある意味非常に愚直かつ自然な拡張になっていると思われるので，数学で既に知られていても良さそうなものですが，筆者が数学者に聞いてみた限りでは知られていないようでした．この記事をご覧になった読者の方が何かご存知であれば，是非筆者までお知らせ願えればと思います．

おしまいに，X_R の非自明な例を一つみてみましょう．群として $G = SL(6)$ を取ります．これは $GL(6)$ の部分群で行列式を 1 としたもの，対角行列 $a = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_6)$ では対応して $u_1 = a_1 + \cdots + a_6 = 0$ ととったものです．表現として $R = \wedge^3 V \ni (v_{ijk})$，但し $i, j, k = 1, \ldots, 6$ で i, j, k について完全反対称なものを取りましょう．$\dim R = 20$ です．a の作用の固有値は互いに異なる i, j, k に対して $a_i + a_j + a_k$ で，20個あります．ですから，特異点が出る条件が，

$$D(m) = \prod_{\text{異なる } i,j,k} (a_i + a_j + a_k - m) = 0 \quad (23)$$

であるような X_R が欲しいわけですが，これは知られているものの非常に複雑です．もう少し簡単にするため，i, j, k, p, q, r がすべて異なれば

$$a_i + a_j + a_k = -(a_p + a_q + a_r) \qquad (24)$$

であることから，$D(0) = \varDelta^2$，但し

$$\varDelta = \prod_{j \neq k} (a_{i=1} + a_j + a_k) \qquad (25)$$

となることを使って，特異点が出る条件が $\varDelta = 0$ であるような超曲面を探しましょう．これは物理的には，表現 R が擬実であるため，質量 m がゼロだと半物質場と呼ばれるものを導入できることに対応しています．

超曲面を

$$0 = \tilde{W} = tX_{R/2} + W_{SL(6)} \qquad (26)$$

と書きますと，答えは

$$X_{R/2} = 2z^3 + u_2 z + u_3 + 2x \qquad (27)$$

です．但し，$W_{SL(6)}$ は (14) で $u_1 = 0$ とおいた

ものです．特異点のある条件 (20) を実際調べましょう．まず，y 微分は単に $y=0$ です．以下 y は無視できます．次に，x 微分から $t=x$．t 微分から $X_{R/2}=0$，すなわち $x=-S(z)/2$．但し $S(z)=2z^3+u_2z+u_3$．これより，残った条件は $\widetilde{W}=\partial\widetilde{W}/\partial z=0$ は

$$\widetilde{W}=P(z)-\left(\frac{S(z)}{2}\right)^2 \tag{28}$$

が z のみの多項式として重根をもつ条件ですが，左辺を計算してみますと実は z の 2 次式であることがわかります．よって，その判別式 δ は簡単に計算できて，

$$\delta=u_5^2-4u_4u_6+u_3^2u_4+u_2^2u_6-u_2u_3u_5 \tag{29}$$

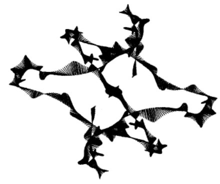
となります．これが実際 (25) に等しいことは数式処理ソフト等をつかって展開すればすぐ確認できます．しかし，筆者には数学的にどのようにして $R=\wedge^3V$ から $X_{R/2}$ に至るべきかは皆目見当がつきません．その他，各種の R についての X_R は文献 6) の付録に列挙してありますので，どうぞ興味を持った方は実際に確認し，X_R を導出する方法を考えてくださると幸いです．

参考文献

1) E. Brieskorn, "Singular elements of semi-simple algebraic groups", in *Actes du Congrès International des Mathématiciens 1970, Tome 2*, pp.279–284. Gauthier-Villars, Paris, 1971.
2) P. Slodowy, *Simple Singularities and Simple Algebraic Groups*, vol.815 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 1980.
3) P.B. Kronheimer, "The construction of ALE spaces as hyper-Kähler quotients", *J. Differential Geom.* **29** (1989) 665.
4) E. Witten, "String Theory Dynamics in Various Dimensions", *Nucl. Phys. B* **443** (1995) 85 [arXiv:hep-th/9503124].
5) S. Terashima and S.K. Yang, "Seiberg-Witten Geometry with Various Matter Contents", *Nucl. Phys. B* **537** (1999) 344 [arXiv:hep-th/9808022].
6) Y. Tachikawa and S. Terashima, "Seiberg-Witten Geometries Revisited", *JHEP* **1109** (2011) 010 [arXiv:1108.2315 [hep-th]].

（たちかわ・ゆうじ，東京大学大学院理学系研究科）

M-理論とメンブレーンの力学



細 道　和 夫

1. M-理論とは

1995年のひもの第2次革命において，それまで知られていたいくつかの“異なる”超弦理論の間に量子論的な等価性（**双対性**）が相次いで発見された．この中でも最も著しい発見として，タイプIIA超弦理論の相互作用（結合定数 g_s）の強くなる極限で11番目の次元が見えてくる[1)]というものがある（図1）．新しい次元は周期的で，その半径は

$$R_{11} = g_s l_s \quad (l_s \text{ はひもの基本長}) \tag{1}$$

と表される．こうして突如出現した11次元の理論は，Wittenによって**“M-理論”**と名づけられた．

11次元というのは面白いことに，一般相対性理論を超対称性と融合した理論（**超重力理論**）を書き下せる最高の次元であることが知られている．11次元超重力理論[2)]は重力場（計量テンソル）・重力微子に加えて，3階反対称テンソルゲージ場

$$C = \frac{1}{6} C_{mnp} \mathrm{d}x^m \mathrm{d}x^n \mathrm{d}x^p$$

からなる．C がゲージ場とは，理論が C を完全形式だけずらすゲージ変換で不変であることを意味する．作用積分 S は $F \equiv \mathrm{d}C$ を用いて，

$$16\pi G_N S = \int \mathrm{d}^{11}x\sqrt{-g}R - \frac{1}{2}\int F \wedge *F - \frac{1}{6}\int C \wedge F \wedge F + \cdots \tag{2}$$

で与えられる．ただし重力微子を含む項を省略した．Newton定数から長さの単位 l_{P} を

$$16\pi G_N = \frac{1}{2\pi}(2\pi l_{\mathrm{P}})^9 \tag{3}$$

で定める．この**Planck長** l_{P} の他に理論に何の結合定数も含まれないことは特筆すべきだろう．M-理論はIIA超弦理論に1次元付け加えて，そこにひもの結合定数をKaluza–Klein的に組み込んでしまったといえる．超対称性から許される最高次元に見つかった究極理論という感じがする．

さて超弦理論の双対性の発見においては，ひも以外のソリトン的物体が重要な役割を果たした．これらの多くは空間的広がりを持っていて，空間 p 次元に広がったソリトンは p-braneと呼ばれる．

M-理論には $p=2$ および 5 のbraneが存在し，それぞれ**M2-brane**（メンブレーン），**M5-brane**と名づけられている．それらは超重力理論のゲージ場 C の電荷・磁荷を持つのが特徴であ

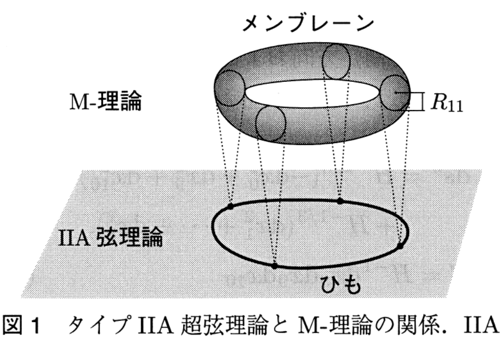


図1　タイプIIA超弦理論とM-理論の関係．IIAひもは11番目の周期的方向（半径 R_{11}）に巻きついたメンブレーンに対応する．

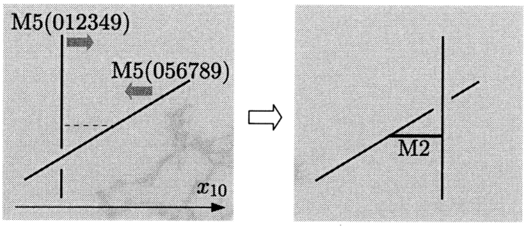


図 2 2 枚の M5-brane のすれ違いから 1 枚の M2-brane が生成される様子．M5(012349) は $x_{0,1,2,3,4,9}$ 方向に延びた M5-brane を表す．

る．メンブレーンの作用は，相対論的荷電粒子の世界線作用の自然な拡張として

$$S_{\mathrm{M2}} = -\tau_2 \int \mathrm{d}^3 x \sqrt{-g} - \tau_2 \int C + \cdots \qquad (4)$$

と書ける[3]．第 1 項は重力場，第 2 項はゲージ場との結合を表している．張力と電荷密度が同じ結合定数 τ_2 で与えられることは，メンブレーンが M-理論の超対称性を半分保つ物体であること，さらにメンブレーンの運動が 3 次元の超対称な場の理論で記述されることと関わっている．

メンブレーンと M5-brane の張力＝電荷密度（磁荷密度）は，以下の公式で与えられる．

$$\tau_2 = \frac{2\pi}{(2\pi l_{\mathrm{P}})^3}, \quad \tau_5 = \frac{2\pi}{(2\pi l_{\mathrm{P}})^6}. \qquad (5)$$

これを用いて，Dirac の量子化条件が成り立つこと，および超弦の双対性から予言される**メンブレーン生成**（図 2 を参照）を超重力理論 (2) から確かめることができる．

■ 2. メンブレーン研究の変遷 ■

本稿で注目するメンブレーンは，M-理論の基本的な力学的自由度であり，ひもの第 2 次革命以前から様々な動機に基づいて研究されてきている．

超弦理論においては，ひもの 2 次元世界面理論によって様々な粒子の量子論的な相互作用，例えば重力子の散乱過程などを評価することができる．一方，M-理論にはこれと同等な定義は未だ与えられていない．これは M-理論の基本的問題として今なお残っている．

図 1 のように，11 番目の周期的な方向に巻きついたメンブレーンは，その半径 R_{11} の小さな極限でタイプ IIA ひもに帰着する．そこでメンブレーンの 3 次元場の理論をひもと同様に量子化して，11 次元量子重力を定式化できないものかと考えるのが自然だろう．このような取組みには長い歴史があるが[4]，弦の理論に比べて多くの困難があって十分満足の行く形に至っていない．

メンブレーンの 3 次元場の理論を調べるもう一つの動機は**ゲージ・重力対応**である．一般に超弦理論，M-理論の brane は重力場とゲージ場に (4) のように結合するので，多数の brane の集まりは超重力理論の荷電ブラックホール解に似た背景を生じることが知られている．brane 多体系を記述する場の理論を詳細に調べることで，対応するブラックホールの謎が解ける可能性がある．

超弦理論のソリトンである Dp-brane は，開いた弦の端が付着できるという特徴を持つ．平坦空間に置かれた場合，平らに静止した状態が最も安定で，様々な励起状態は brane にひもが付着して運動することで表される．興味深いのは開いたひもの運動から $p+1$ 次元のゲージ理論が現れること，さらに N 枚の重なった Dp-brane の上のゲージ対称性は $U(N)$ に拡大することである．

タイプ IIB 超弦理論に N 枚の D3-brane を配置した系の考察から，Maldacena は $AdS_5 \times S^5$ 空間上の超重力理論と 4 次元超対称 $U(N)$ ゲージ理論が等価であるという大胆な予想を提唱した（**AdS/CFT 双対性**[5]）．M-理論のメンブレーンに対しても同様の考察ができるだろうか．

N 枚の重なったメンブレーンが 11 次元時空の中で x_0（時間）方向および x_9, x_{10} 方向に延びているとしよう．超重力理論の古典解は

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= H^{-2/3}(-\mathrm{d}x_0^2 + \mathrm{d}x_9^2 + \mathrm{d}x_{10}^2) \\ &\quad + H^{-1/3}(\mathrm{d}x_1^2 + \cdots + \mathrm{d}x_8^2), \\ C &= H^{-1}\mathrm{d}x_0 \mathrm{d}x_9 \mathrm{d}x_{10} \end{aligned} \qquad (6)$$

となる．H は残りの 8 方向（$\mathbb{R}^8$）の調和関数で，すべてのメンブレーンが原点に重なった場合は

$$H = 1 + \frac{L^6}{r^6},$$
$$L^6 = 32\pi^2 l_{\rm P}^6 N, \quad r^2 = x_1^2 + \cdots + x_8^2 \quad (7)$$

となる．原点付近に注目すると，計量は

$$ds^2 = \frac{L^2(dy^2 + ds^2_{(\mathbb{R}^{1,2})})}{4y^2} + L^2 ds^2_{(S^7)} \quad (8)$$

のように，$AdS_4 \times S^7$ に漸近する．従ってメンブレーンの多体系は，AdS/CFT 対応を具体的に検証できる設定の一つと期待される．

メンブレーンの多体系の運動を記述する理論は (4) の作用からどう変わるのか，何らかの対称性の拡大が見られるのか，実はごく最近までこの問題は謎のままであった．対称性からの制限を除いては，ほとんど手掛かりがなかったのである．

理論に期待される対称性は $AdS_4 \times S^7$ 空間の対称性 $SO(3,2) \times SO(8)$ および 3 次元の最大の超対称性 $\mathcal{N} = 8$ で，これらは全体として Lie 超代数 $OSp(8|4)$ をなす．とくに $SO(3,2)$ 部分から，理論が 3 次元共形場理論（CFT）であることが要求される．

共形不変な場の理論の作用積分を書こうとすると，次元を持った結合定数を含むことはできない．理論にゲージ場が存在する場合，従って運動項に Yang–Mills（YM）項を含めることはできず，許されるのは Chern–Simons（CS）項のみである．

$$kS_{\rm CS}[A] = \frac{k}{4\pi}\int {\rm Tr}\Big(A dA + \frac{2}{3}A^3\Big). \quad (9)$$

整数 k は Chern–Simons レベルとよばれる結合定数である．これに物質場を結合させて高い超対称性を持つ理論が作れるかというのが問題である．

同様の問題は YM 項と CS 項の共存する場合に広く調べられ，$\mathcal{N} = 3$ より高い超対称性は不可能であることが知られていた．そのためか，メンブレーン多体理論の作用をあらわに書き下す問題は真剣に取り組まれていなかった．

3. BLG 模型，ABJM 模型

2007 年に Bagger と Lambert および Gustavsson により，3 次元 $\mathcal{N} = 8$ 超対称性をもった非常に特殊な超共形ゲージ理論（**BLG 模型**[6]）が発見されると，それまで放っておかれていたこの問題が瞬く間に多くの研究者の注目を集めることになった．そして翌 2008 年に Aharony らによって提唱された **ABJM 模型**[7]は，今日ではメンブレーン多体系の標準的な模型と位置づけられている．

表 1 ABJM 模型を構成する場と，その $U(N) \times U(N) \times SO(6)_{\rm R}$ の下での表現．$SO(6)_{\rm R}$ は 6 つの超対称性を混合する R-対称性．添字 a は値 1 から 4 をとる．

場	種類	対称性の下での変換性
A	ゲージ場	$(\mathbf{adj}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$
$\tilde{A}$	ゲージ場	$(\mathbf{1}, \mathbf{adj}, \mathbf{1})$
Z_a	スカラー場	$(\mathbf{N}, \bar{\mathbf{N}}, \mathbf{4})$
Ψ^a	スピノル場	$(\mathbf{N}, \bar{\mathbf{N}}, \bar{\mathbf{4}})$

ABJM 模型は $\mathcal{N} = 6$ 超共形不変な $U(N) \times U(N)$ ゲージ理論である．この模型は表 1 にまとめた通り，ゲージ場 $A, \tilde{A}$ および $N \times N$ 複素行列に値をとるスカラー場，スピノル場各 4 つずつ (Z_a, Ψ^a) からなる．模型は整数 k と N でラベルされ，作用は

$$S = kS_{\rm CS}[A] - kS_{\rm CS}[\tilde{A}] + \text{物質場の寄与} \quad (10)$$

の形をとる．物質場の寄与には運動項などのほかに，次のスカラーポテンシャル V が含まれる．

$$V = {\rm Tr}\big(F^a_{bc}\bar{F}^{bc}_a\big),$$
$$F^a_{bc} \equiv \big\{\delta^a_b(Z_c\bar{Z}^d Z_d - Z_d\bar{Z}^d Z_c) + 2Z_b\bar{Z}^a Z_c\big\}$$
$$- (b \leftrightarrow c). \quad (11)$$

ただし添字 $a, b, c, \cdots$ の対は 1 から 4 まで和をとるものとする．

Aharony らの主張は，この模型が**オービフォルド空間** $\mathbb{C}^4/\mathbb{Z}_k$ を運動する N 枚のメンブレーンを記述するというものである．ただし $\mathbb{Z}_k$ による同一視は $\mathbb{C}^4$ の座標 $(z_1, \cdots, z_4)$ に

$$(z_1, \cdots, z_4) \sim (\omega z_1, \cdots, \omega z_4) \quad (12)$$

$(\omega^k = 1)$ と作用する．$\mathcal{N} = 6$ という超対称性は，この $\mathbb{Z}_k$ 同一視によって $\mathcal{N} = 8$ の一部が破れた

結果と理解できる．

この主張の最も基本的なチェックとして，縮退した真空のモジュライ空間を調べてみよう．真空では運動エネルギーが零だから，スカラー場はすべて定数である．ポテンシャルの零点では $F^a_{bc}=0$ であるが，この式はゲージの自由度を除いて

$$Z_a = \mathrm{diag}(z_a^{(1)}, \cdots, z_a^{(N)}) \tag{13}$$

と解かれる．対角成分 $z_a^{(i)}$ を "i 番目のメンブレーンの $\mathbb{C}^4$ 内の位置座標" と見なすことによって，縮退した真空のそれぞれが N 枚のメンブレーンの配置に対応するのが見えてくる．

N 枚のメンブレーンの棲む空間が $\mathbb{C}^4$ ではなくその $\mathbb{Z}_k$ オービフォルドなのはなぜだろうか．注意深くこの模型を調べると，ゲージ変換でスカラー場を (13) のように対角化しても，この形を保つ定数値ゲージ対称性が依然残っている．このうち N 個の $U(1)$ 位相変換は，$\mathbb{C}^4$ 内の N 個の点にそれぞれ (12) のように作用する．理論の正しいモジュライ空間を得るにはゲージ対称性による同値関係で割らねばならないが，この変換の下で実は CS 項は不変ではなく，**モノポール**の存在を考慮すると理論の真のゲージ対称性は $\omega^k=1$ を満たす位相回転のみであることが分かる．

■ 4. AdS/CFT 対応と自由エネルギーの謎 ■

ABJM 模型がメンブレーン多体理論であると認識されると，それを用いて AdS/CFT 対応が検証できるかどうかが次の興味になった．ABJM 模型の双対は $AdS_4 \times S^7/\mathbb{Z}_k$ 上の 11 次元超重力理論と予想される．ここで，オービフォルド上の N 枚のメンブレーンはその k 重被覆である $\mathbb{R}^8$ 上に kN 枚いるのと同じことから，重力双対側の曲率半径 L は先の公式から次のように修正される．

$$L^6 = 32\pi^2 l_{\mathrm{P}}^6 kN. \tag{14}$$

以下では多数のメンブレーン（N 枚）の系の自由エネルギー $F(k,N)$ を重力側，ゲージ理論側で評価し比較する問題を取り上げる．

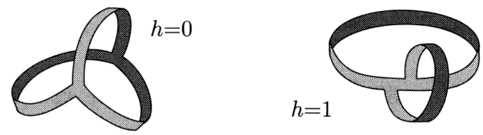


図 3 2-ループ図形（$l=2$）の例とその種数．

自由エネルギー F は系の自由度の個数の尺度を与えるという側面に着目すると，ABJM 模型側ではすべての場が $N \times N$ 行列に値をとるので，大ざっぱな自由度の勘定から $F \sim N^2$ のスケール則が成り立つと予想される．一方重力理論側では，問題となる時空 $AdS_4 \times S^7/\mathbb{Z}_k$ の曲率半径 L が十分大きく重力の量子効果が無視できると仮定して，古典超重力理論の作用積分をこの時空上で評価した値を自由エネルギーと同定できる*1)．ここではスケール則のみに着目して，11 次元の Einstein–Hilbert 作用 $\sqrt{-g}R$ の $AdS_4 \times S^7/\mathbb{Z}_k$ 時空にわたる積分を見積もると，

$$F \sim \frac{1}{k} \cdot L^{11-2} \sim k^{\frac{1}{2}} N^{\frac{3}{2}} \tag{15}$$

となり，ゲージ理論側と一致しない（指数の -2 はスカラー曲率が微分を 2 個含むためである）．

実はこの不一致の問題は古くから認識されていたもので，AdS/CFT 対応が成り立たないことを示すものではない．不一致の理由は AdS/CFT 対応が**強結合/弱結合双対性**であることにある．つまり重力の古典描像が成り立つパラメータ領域では ABJM 模型が強結合であり，そのため自由度の数は行列の成分の素朴な数え上げ N^2 には従わず，強い相互作用のため見掛け上の自由度が $N^{3/2}$ に減っていると考えられる．

't Hooft の議論に従って ABJM 模型の相互作用の強さを調べよう．模型に現れる場はすべて $N \times N$ 行列に値をとるので，プロパゲータを二重線で描き，各々の線を行列の脚と見なす．こうして Feynman 図形にリーマン面と同じように種数 h が定義できる（図 3）．頂点を v 個，プロパ

*1) これは素朴には発散量であるが，AdS 時空の遠方を切り落として有限体積にし，さらに "発散の相殺項" としてうまい表面積分を加え，意味のある有限量を取り出す処方が知られている．

ゲータを p 本，行列の脚のループを f 個持つ図形の自由エネルギーへの寄与はFeynman則から，

$$k^v \cdot (1/k)^p \cdot N^f = N^{2-2h}\lambda^{l-1} \qquad (16)$$

に比例する．ただし $\lambda \equiv N/k$ は't Hooftの結合定数．また以下の公式を用いた．

$$2-2h = v-p+f \quad \text{（オイラー数）},$$
$$l \equiv p-v+1 \quad \text{（ループの次数）}. \qquad (17)$$

N が大きなときは種数0のplanar図形の寄与が支配的になる．またABJM模型の相互作用の強さは λ で決まり，従って自由エネルギーのスケール則は $\lambda \sim 1$ を境に変わるだろうと予想される．

メンブレーン N 体系の有効な記述は，k の値に応じてどう変わるだろうか．S^7 を $\mathbb{CP}^3$ 上のHopf束と見なすと，$\mathbb{Z}_k$ 同一視はファイバー S^1 の周期を縮めるので，k の増加につれてまず(1)に従ってM-理論からIIA理論に移り，ついでABJM模型の弱結合に移る．詳しくは以下のようになる．

$$\begin{aligned} 1 \le k \ll N^{\frac{1}{5}} &: \text{M-理論 } (AdS_4 \times S^7/\mathbb{Z}_k) \\ N^{\frac{1}{5}} \ll k \ll N &: \text{IIA 理論 } (AdS_4 \times \mathbb{CP}^3) \\ N \ll k \quad &: \text{ABJM 模型} \end{aligned}$$

■ 5. 美しすぎる解決 ■

自由エネルギーのスケール則 $F \sim N^{3/2}$ を強結合ABJM模型から再現するという難問は，最近のKapustinら[8)]およびDrukkerら[9)]による画期的なアイデアによって鮮やかに解決された．

自由エネルギーを場の理論の経路積分で求める際，通常は理論をEuclid化し，虚時間方向を周期的にして温度を導入した後に積分を評価する．ここではそれと似た操作として，Euclid化した理論を S^3 に実現し，その経路積分を考える．その結果は，無限遠に S^3 をもつEuclid符号 AdS_4 空間上の超重力作用積分と対応するはずである．

しかしなぜ S^3 を選ぶのかというと，理由は2009年のKapustinらの発見にある．近年のゲージ理論に様々な技術革新をもたらしてきたアイデアに**局所化原理**というものがあるが，彼らは S^3 上の3次元ゲージ理論にこれを応用し，自由エネルギーの厳密公式を導くことに成功している．

表2　$\mathcal{N}=2$ 超対称性の表現．D と F は補助場（作用積分に微分を伴って登場しないので簡単に消去できる）．ゲージ場の運動項がCS項のみのときは λ, σ も補助場になる．

名前	ベクトル多重項	カイラル多重項
ラベル	ゲージ群	ゲージ群の表現，および $U(1)_{\rm R}$ 電荷
場	A_m：ベクトル λ：スピノル σ：実スカラー D：実スカラー	ϕ：複素スカラー ψ：スピノル F：複素スカラー

Kapustinらの処方箋を使うには，まず $\mathcal{N}=2$ 超対称性の表現（表2）を用いてABJM模型を書き直す必要がある．ゲージ場 $A_m, \tilde{A}_m$ はゲージ群 $U(N) \times U(N)$ のベクトル多重項，物質場 Z_a, Ψ^a はゲージ群の表現 $(\mathbf{N}, \bar{\mathbf{N}})$ および $(\bar{\mathbf{N}}, \mathbf{N})$ に属するカイラル多重項各2つずつに組み入れられる．**補助場**を導入すると，理論の作用の選び方によらずに超対称性変換を書き下せるのが利点で，この性質が局所化原理の適用の際に重要になる．

局所化原理とは，対称性を備えたある種の積分の問題において非零の積分値への寄与は**固定点**（対称性で不変な点）からしか生じない，というものである．一般の $\mathcal{N}=2$ 超対称ゲージ理論について，S^3 上の分配関数を定める経路積分にこれを適用すると，ゲージ変換の自由度を除いて

$$\sigma = -\ell D = (\text{定数}), \quad \text{その他の場} = 0$$

が固定点を定める（ℓ は S^3 の半径）．さらに超対称性のおかげで，分配関数の値を変えずに経路積分重み e^{-S} をうまく変形して，固定点から離れるにつれ急減衰するようにできる．こうして無限次元の経路積分は固定点集合上の積分，つまり σ の定数値に関する**行列積分**まで簡単化するのである．

残ったゲージ対称性を使って積分をさらに簡単化すると，最終的に球面上のABJM模型の自由エネルギー F は σ の $2N$ 個の固有値についての次のような積分にまとまる．

$$e^{-F} = \int \prod_{i=1}^{N} \frac{\mathrm{d}\mu_i}{2\pi} \frac{\mathrm{d}\tilde{\mu}_i}{2\pi} e^{-\frac{1}{2g_s}(\mu_i^2 - \tilde{\mu}_i^2)} \times \frac{\prod_{i<j}(2\sinh\frac{\mu_i-\mu_j}{2})^2 (2\sinh\frac{\tilde{\mu}_i-\tilde{\mu}_j}{2})^2}{\prod_{i,j}(2\cosh\frac{\mu_i-\tilde{\mu}_j}{2})^2}. \quad (18)$$

ただし $g_s \equiv 2\pi i/k$ である．自由エネルギーがこのような簡潔な積分表式で書けるのは驚くべき進歩である．

Drukker らは残った $2N$ 次元積分を **large** N **行列模型**の伝統的手法を用いて調べた．以下，彼らの解析を簡単に紹介しよう．便宜上，ゲージ群を $U(N) \times U(\tilde{N})$ に一般化して調べることにする．また g_s を実数に接続し，'t Hooft 結合定数としては $t \equiv g_s N, \tilde{t} \equiv g_s \tilde{N}$ を用いる．

自由エネルギーを g_s のべきに展開し，(18) を

$$e^{-\sum_h g_s^{2h-2} F_h(t,\tilde{t})} = \int \mathrm{d}^N\mu \mathrm{d}^{\tilde{N}}\tilde{\mu} e^{-S(\mu,\tilde{\mu})}$$

と書いてみる．$t, \tilde{t}$ を固定して g_s を小さくすると，左辺は planar 図形の寄与 $g_s^{-2}F_0$ が支配的になり，右辺は変分方程式 $\partial_{\mu_i}S = \partial_{\tilde{\mu}_i}S = 0$ の解を S に代入した鞍点近似がよくなる*2)．

2 種類の多数の固有値はそれぞれ区間 $C, \tilde{C}$ 上に連続的な分布をなすとして，それらを

$$\int_C \mathrm{d}\mu\rho(\mu) = \int_{\tilde{C}} \mathrm{d}\tilde{\mu}\tilde{\rho}(\tilde{\mu}) = 1 \quad (19)$$

の規格化に従う分布関数 $\rho, \tilde{\rho}$ で表す．さらに関数

$$\omega(\xi) \equiv t\int_C \mathrm{d}\mu\rho(\mu)\coth\frac{\xi-\mu}{2} - \tilde{t}\int_{\tilde{C}} \mathrm{d}\tilde{\mu}\tilde{\rho}(\tilde{\mu})\tanh\frac{\xi-\tilde{\mu}}{2} \quad (20)$$

を導入しよう．この関数は周期 $2\pi i$ をもち，基本領域内の 2 つの区間上を除いては正則である (図 4)．変分方程式は $\omega(\xi)$ の不連続性を決める条件に書き直すことができ，その解は次で与えられる．

$$e^{\omega} + e^{2\xi-\omega} = a(1 + be^{\xi} + e^{2\xi}). \quad (21)$$

*2) 式 (18) のガウシアン重みの符号に注意すると，変分方程式は S の極小値を与えないように見えるが，Drukker らはこれを回避する注意深い議論を与えている．本稿では紙面の都合上，この問題に目をつぶって進む．

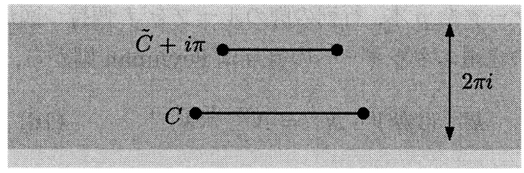


図 4　$\omega(\xi)$ は区間 C および $\tilde{C} + i\pi$（$\tilde{C}$ を虚軸方向に π ずらしたもの）上で不連続である．

式 (21) はパラメータ a, b でラベルされる種数 1 のリーマン面 Σ を定める．変数 $t, \tilde{t}$ および自由エネルギー F_0 の微分は，みな Σ 上の様々な経路に沿った 1-形式 $\omega(\xi)\mathrm{d}\xi$ の周回積分と書けるので，a, b の関数になる．この手法を用いて Drukker らは $F_0(t, \tilde{t})$ の関数形を精密に決定し，ABJM 模型の強結合領域での自由エネルギーのスケール則

$$F \simeq \frac{\sqrt{2}\pi}{3} k^{\frac{1}{2}} N^{\frac{3}{2}} \quad (22)$$

を導くことに成功した．

M-理論とメンブレーンの力学の難問が一つ一つ解決され始めている．今後ゲージ理論にはどのような技術革新があるか，未だ謎の多い M-理論の数理をどこまで解明できるか，さらなる進展に注目していきたい．

参考文献

1) E. Witten, *Nucl. Phys. B* **443**, 85 (1995).
2) E. Cremmer, B. Julia and J. Scherk, *Phys. Lett. B* **76**, 409 (1978).
3) E. Bergshoeff, E. Sezgin and P.K. Townsend, *Phys. Lett. B* **189**, 75 (1987).
4) B. de Wit, J. Hoppe and H. Nicolai, *Nucl. Phys. B* **305**, 545 (1988).
5) J.M. Maldacena, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, 231 (1998).
6) J. Bagger and N. Lambert, *Phys. Rev. D* **75**, 045020 (2007); *Phys. Rev. D* **77**, 065008 (2008); *JHEP* **0802**, 105 (2008), A. Gustavsson, *Nucl. Phys. B* **811**, 66 (2009).
7) O. Aharony, O. Bergman, D.L. Jafferis and J. Maldacena, *JHEP* **0810**, 091 (2008).
8) A. Kapustin, B. Willett and I. Yaakov, *JHEP* **1003**, 089 (2010).
9) N. Drukker, M. Marino and P. Putrov, *Commun. Math. Phys.* **306**, 511 (2011).

（ほそみち・かずお，京都大学基礎物理学研究所）

超弦理論が教える繰り込み群とタイムマシンの関係



中山　優

1. 繰り込み群の思想と赤外固定点

20 世紀の理論物理学における一つのパラダイムシフトはウィルソンによる繰り込み群の思想であった[1)]．**繰り込み群**は，理論にスケール変換と粗視化を施し物理量の応答を調べる手法として開発された．場の量子論に代表される無限自由度系を何とか人類の理解できる重要なパラメタのみを残してあとは「繰り込んで」しまう．この発想は，具体的な臨界現象の研究に役立ってきたのみならず，なぜ我々の素粒子物理学が，根源的な理論（超弦理論？）の詳細を知らなくても場の量子論で記述できるのかと言う疑問にも答えてきた．

臨界現象をはじめとする赤外極限の物理量の振舞いは，繰り込み群の固定点とその近傍での様子を調べることで理解できる．すなわち繰り込み群の固定点の分類と臨界現象の分類は等しい．そこでは**スケール不変性**と言う概念が重要な役割を果たす．繰り込み変換を繰り返し何らかのスケールが現れたとする．さらにスケール変換を施していくと，程なくそのスケールの情報は理論のパラメタに繰り込まれてしまい，もはやスケールがあったことを忘れてしまう．よって繰り込み変換の固定点は必然的にスケール変換に対して不変である．

しかし，固定点が必ず存在すると言えるのであろうか？ なぜ，繰り込み変換がカオス的な様相を示さないといえるのであろうか？ 本稿の目標は，タイムマシンができないことが繰り込み群が固定点を持つと示唆するということを，超弦理論の数理を用いて解説することである．

2. スケール不変性と共形場の理論

赤外固定点では理論はスケール変換に対して不変である．相対論的な場の量子論において，スケール変換に対する不変性は保存する対称エネルギー運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ の性質として理解できる．今，そのトレースが

$$T^{\mu}_{\ \mu} = \partial^{\mu} J_{\mu} \qquad (1)$$

と**ビリアルカレント**と呼ばれるカレント J_μ の発散で表されるとする．このとき，保存するスケールカレント $D_\mu = x_\nu T^{\nu}_{\ \mu} - J_\mu$ が存在して，理論はスケール変換 $x^\mu \to \lambda x^\mu$ に対して不変である．

いろいろな相対論的な場の量子論を調べてみると，ほぼすべての場合に，スケール不変性を持っている系はより大きな対称性，すなわち**共形変換**，に対して不変であることが経験的に知られていた．共形変換とは平坦な時空の計量を全体の共形因子を除いて変えない（つまり $ds^2 \to f(x) ds^2$）変換で，並進，ローレンツ変換，スケール変換に加えて，特殊共形変換

$$x^\mu \to \frac{x^\mu + v^\mu x^2}{1 + 2v^\mu x_\mu + v^2 x^2} \qquad (2)$$

で生成される．共形変換は $SO(d,2)$ と呼ばれる群をなし，$d\ (>2)$ 次元時空の相対論的な散乱行

列が持つ内部対称性を除いた整数スピンの対称性のうち最大なものである．$d=2$ ではビラソロ対称性と呼ばれる無限次元の対称性にさらに拡大される．

共形対称性を持つ場の量子論のことを**共形場の理論**（Conformal Field Theory, CFT と略すことが多い）と呼ぶが，共形対称性は理論に対して強い制限を与える．特に 2 次元では，ビラソロ対称性の表現論を用いて最小共形場理論と呼ばれるクラスの理論は完全に分類することができる．高次元でも，例えば理論のスペクトラムや相関関数に強い制限を与えることができ，3 次元のイジング模型に対しても近年大きな進展があった[2]．また，$\mathcal{N}=4$ の超対称性を持つ理論の可積分性も共形対称性に強く依拠している．

理論が共形変換に対して不変である条件は，エネルギー運動量テンソルがトレースレス $T^{\mu}_{\ \mu}=0$ となることである．より正確には，エネルギー運動量テンソルに任意性があるために，先ほど導入したビリアルカレント J_μ が何らかの 2 階のテンソルの発散 $J_\mu=\partial^\nu L_{\mu\nu}$ と書けることが条件となる．この場合，エネルギー運動量テンソルを $L_{\mu\nu}$ を使って改良することができてトレースレスにでき，保存する特殊共形変換カレント

$$K^{(\rho)}_{\mu}=\left(\rho_\nu x^2-2x_\nu(\rho_\sigma x^\sigma)\right)T^{\nu}_{\ \mu} \qquad (3)$$

を作ることができる．

今，古典的にスケール不変な理論における繰り込みスケール μ での有効結合定数 $g^i(\mu)$ の繰り込み変換を摂動論で計算したとしよう．エネルギー運動量テンソルのトレースは，そのベータ関数 $\beta^i(g^j(\mu))=\frac{dg^i}{d\log\mu}$ で展開される：$T^{\mu}_{\ \mu}=\beta^i O_i$．ここで，$O_i$ は結合定数 g^i に対応する理論の局所演算子である．共形変換における不変性はベータ関数が消えること，$\beta^i=0$ を要求する一方，スケール不変性は，運動方程式などの演算子恒等式を用いて，$\beta^i O_i=\partial^\mu J_\mu$ と書けるという明らかに弱い条件になっている．

この議論からわかるように，数学的に考えると，スケール不変な系が共形変換で不変である必然性はない．よって，共形場の理論はいかに性質が美しくて強い結果が得られたとしても，ウィルソンの意味での赤外固定点の分類としては甚だ不完全に思えるかもしれない．それに，そもそも赤外固定点が存在しないかもしれない．しかし，驚くべきことに，2 次元時空の場の量子論ではユニタリ性や因果律といった妥当と思われる仮定の下で，スケール不変性と共形不変性は等価であることが示せる[3]．さらに，4 次元でも同じような結果が得られそうであることが近年明らかになってきた．その鍵は場の量子論の自由度の勘定にある．

3. 場の理論の自由度を数える

場の量子論は無限自由度系であって，その自由度を定式化するのは易しくない．しかし，繰り込み群の思想から考えると，高いスケールの情報を繰り込んでいくにつれて減少する，つまり，スケール変換に対して単調減少な「自由度」を定義できそうである．この試みは 2 次元の場の量子論では完全な成功を収めていて，**ザモロジコフの c-定理**と呼ばれる[4]．

2 次元の c-定理は，2 次元の一般の場の量子論において，繰り込み群の流れに従って単調減少する関数 $c(g(\mu))$ が存在し（つまり $\frac{dc(g(\mu))}{d\log\mu}\geq 0$），さらに，その c は繰り込み群の固定点で，理論の共形アノマリーを表す係数と一致することを主張する．共形場の理論のエネルギー運動量テンソルのトレースは，前節で見たように平坦な背景ではゼロであるが，偶数次元の曲がった空間上ではアノマリー（量子異常）からゼロでないことが知られている．特に 2 次元では，曲率 R に対して，$\langle T^{\mu}_{\ \mu}\rangle=-\frac{c}{12}R$ で与えられる．この c はビラソロ代数の中心拡大と等しく，場の量子論の自由度を勘定する．

同じことを高次元にも拡張したいというのは自然な要求である．偶数次元では 2 次元と同じように共形アノマリーが存在するので，共形アノマリーの係数を「自由度」と思いたい．ただ，2 次元と異なり共形アノマリーは一義的ではない．例えば，4

次元の共形場の理論に対して

$$\langle T^{\mu}{}_{\mu}\rangle = \frac{a}{16\pi^2}(\mathrm{Euler}) - \frac{c}{16\pi^2}(\mathrm{Weyl})^2 \quad (4)$$

であることが知られている．ここで，$\mathrm{Euler} = R^2_{\mu\nu\rho\sigma} - 4R^2_{\mu\nu} + R^2$, $(\mathrm{Weyl})^2 = R^2_{\mu\nu\rho\sigma} - 2R^2_{\mu\nu} + \frac{1}{3}R^2$ と曲率テンソルで表される．カーディーの予想[5]は，このうち，a が繰り込み群の流れに対して減少する関数（a-関数と呼ぼう）の固定点の値であるというものであった．この構成は一般の偶数次元に拡張できる．

実際，4 次元のいろいろな場の理論の繰り込み群の流れを調べてみると，式 (4) に出てくる a と c の組合せのうち，他のすべての線形結合には，繰り込み群の流れに沿って減少しない反例が存在することがわかっていた．そこで，繰り込み群の流れに従って単調減少する関数 $\frac{da(g(\mu))}{d\log\mu} \geq 0$ を満たす $a(g(\mu))$ が存在し，さらに，その $a(g(\mu))$ は繰り込み群の固定点で共形アノマリー a と一致するというのが，4 次元の **a-定理**の主張である．ただし，2 次元の場合と異なって，万人が納得する証明が知られているわけではない（よって，定理と言うのはワイルズ以前のフェルマーの定理同様，慣習的な呼び名である）．オスボーンは，摂動的繰り込み可能な理論において，局所的な繰り込み群の無矛盾性から

$$\frac{da(g(\mu))}{d\log\mu} = \chi_{ij}\beta^i\beta^j \quad (5)$$

を示した[6]．もし，χ_{ij} が正値であるとすると，この式は (A) a-定理は正しく，(B) a に下限があれば繰り込み群は赤外固定点をもち，(C) 固定点ではベータ関数が消え共形不変である，ということを示している．残念なことに，摂動論的な傍証を除いて，χ_{ij} が正値であるという一般論は知られていない．次節では，コマルゴツキーとシュウィンマーが 2011 年に提案した有効作用の普遍的な性質に基づく新しい a-定理の説明を解説する．

一方で，奇数次元に対しては，共形アノマリーが存在しないので，上記の提案は意味をなさない．球面上の分配関数，エンタングルメントエントロピーの普遍的な振舞いなど，全く別の方針から提案がなされていて，かなりの傍証も得られている（が今回は触れる余裕がない）．5 節で超弦理論に基礎を置いたホログラフィックなアプローチを考える際にもう一度立ち戻りたい．

4. a-定理の物理的説明

4 次元の a-定理の本質は，有効作用のユニタリ性，因果律の成立，共形変換に対するアノマリーの相殺といった場の量子論の一般的と思われる性質から理解できる．今，紫外領域で固定点にいる場の量子論に，有効な摂動（例えばスカラー場の質量項 $m^2\phi^2$）などを加えたとき，赤外領域で共形アノマリーの係数 a がどのように変化するか調べたいとしよう．a-定理が成り立てば $a_{\mathrm{UV}} \geq a_{\mathrm{IR}}$ なのだが，これを一般的に示したい．

論文[7]のアイディアに従って，非常に弱く相互作用する**ディラトン**と呼ばれる場 τ を人工的に導入する．ディラトンの役割は有効な摂動によって破れた共形不変性を見かけ上回復させる点にある．例えば，質量項の例では，$e^{-2\tau}m^2\phi^2$ と質量項を見かけ上共形不変に書き換える．ここで，ディラトンは手で与えられた共形不変な運動項 $f^2e^{-2\tau}(\partial^\mu\tau\partial_\mu\tau)$ を持ち，f^2 が非常に大きいとするとディラトンの量子揺らぎは小さく外場として扱える．局所スケール変換 $ds^2 \to e^{2\omega}ds^2$ に対してディラトン場は $\tau \to \tau + \omega$ のように変換し，この変換性が有効な摂動を見かけ上共形変換不変にするのである．

ディラトンの相互作用は幾らでも弱くでき，赤外領域での有効作用はディラトンの存在によって影響を受けないはずである．共形アノマリーの相殺を考えると，実は赤外での有効作用 S_{eff} はディラトンの部分が完全に分離されて

$$S_{\mathrm{eff}} = S_{\mathrm{CFT_{IR}}} + f^2\int d^4x e^{-2\tau}(\partial^\mu\tau\partial_\mu\tau) + 2(a_{\mathrm{UV}} - a_{\mathrm{IR}})(\partial_\mu\tau)^4 \quad (6)$$

であることが示される．ここで，ディラトンを結合させる前の，有効な摂動を加えた理論自体の赤外固定点は共形不変であると仮定し，その有効作用を $S_{\mathrm{CFT_{IR}}}$ と呼んだ．重要なのはディラトンの 4 階微分の相互作用 $(\partial_\mu\tau)^4$ が共形アノマリーの

紫外と赤外での値の差 $(a_{\rm UV}-a_{\rm IR})$ によって一意に決まっている点である．これはディラトンのおかげで理論は常に形式上共形不変であるから，全体のアノマリーの和は変化できないというトフーフトの議論による．そのため，もともと考えたい繰り込み群の流れにおける共形アノマリーの紫外と赤外での値の差は，ちょうどディラトンの 4 階微分相互作用の効果（ヴェス・ズミノ一項と呼ばれる）と相殺していなければならない．

今の文脈でディラトンの 2 体–2 体散乱を考える．散乱振幅が因果的でユニタリ性を保持するためには分散関係の式 $a_{\rm UV}-a_{\rm IR}=\frac{f^4}{\pi}\int_{s>0}\frac{\sigma(s)}{s^2}$ と光学定理による $\sigma(s)\geq 0$ を利用して，ディラトンの 4 階微分相互作用の符合が非負でないといけないことがわかる．同じ結論は $a_{\rm UV}-a_{\rm IR}$ が負の場合に，$\tau=c^\mu x_\mu$ といった非自明な背景でディラトンの伝播を考えると光速を超えてしまい因果律と矛盾することからも得られる．つまり，a-定理が成立していないと，場の量子論の構成自体が自己矛盾するというわけである．

上記の a-定理の議論で，もともとの理論の赤外固定点は共形不変性を持つということを仮定した．この仮定によって，式 (6) において，ディラトンの有効作用が分離されていることが保証されていたのである．もし，赤外固定点が共形不変でなくスケール不変性しかもたなかったとすると，赤外領域における相互作用に

$$\delta S=\int d^4x\tau\partial^\mu J_\mu \tag{7}$$

なる項が付け加えられなければならない[9]．ここで，J_μ は前に議論したスケール不変であるが共形不変でない理論に特有のビリアルカレントである．

まず，この項があると一般的に先ほどの a-定理の説明がうまくいかなくなる．と言うのは，ディラトンの 2 体–2 体散乱に，ビリアルカレントの交換の寄与が同じオーダーで足されてしまい，$a_{\rm UV}-a_{\rm IR}\geq 0$ でなければならないと結論できないからである．

ルーティー・ポルチンスキー・ラタッチはこの議論を推し進めて，a-定理のほうが正しく，4 次元でスケール変換で不変な理論は共形不変であるべきだと主張した[8]．今，紫外固定点の理論がスケール不変であるが共形不変でないとしよう．ディラトンと結合させるためには，紫外領域で (7) に対応するディラトンとビリアルカレントの結合がなければいけない．この条件の下で，理論に有効な摂動を加えて赤外でどう振る舞うか計算してみよう．今，ビリアルカレントの交換がディラトンの 2 体–2 体散乱に寄与するが，その寄与のエネルギー依存性はスケール不変性から完全に決まってしまう．具体的には，a_v をビリアルカレントの相関関数から決まる定数として $a_v\log(\Lambda_{\rm UV}/\Lambda_{\rm IR})$ と紫外カットオフ $\Lambda_{\rm UV}$ に対数的に依存する寄与が $a_{\rm UV}-a_{\rm IR}$ に得られる．しかし，これは場の自由度がいくらでも変化させることができることになって，a_v がゼロでなければ不条理である．摂動論ではビリアルカレントの 2 点間数がこの寄与を支配し，式 (5) でビリアルカレントをベータ関数で書いたものと等価な式を得る．

a_v がゼロであれば，a-定理のほうは守られる．これは 4 次元でスケール不変性が共形不変性を示唆しているのであろうか？ 直ちにわかることは，a_v が消えるためには，ビリアルカレントの相関関数は非常に制限されているということである．同じ議論を 2 次元で行うと，ユニタリ性と因果律からビリアルカレントが消えなくてはいけないことがわかる．今のところ 4 次元では，摂動論ではビリアルカレントが消えなくてはいけない等のいくつかの傍証を除いて，a_v が消えることとビリアルカレントが消えることの完全な同値性は（この原稿執筆段階では）筆者は知らない．しかし，ビリアルカレントが消えずに a_v が消えるのは非常に特殊な場合であると想像される．

5. AdS/CFT とホログラフィックな a-定理

共形場の理論（CFT）は，超弦理論における反ドジッター（Anti de Sitter，AdS と略されることが多い）空間上での量子重力理論を非摂動的に定式化すると言う意味でも重要である．これは**ホログラフィック対応**と呼ばれる，d 次元時空の場

の量子論と，$d+1$ 次元空間の重力理論の双対性の根幹をなすもので，共形場の理論の研究は量子重力の研究と等価であると言うことさえできる．

この対応を，**AdS/CFT 対応**と呼ぶが，その最も基本的な考え方は，場の量子論における繰り込み変換のスケール $r=\log\mu$ を $d+1$ 次元時空の新しい座標だと思うという点にある．さらに，d 次元時空の場の量子論における対称性は，$d+1$ 次元の量子重力理論の時空の対称性として実現されていると考える．量子重力理論を考えるのは難しいので，以下では重力理論は古典的であると仮定しよう．場の量子論の言葉では共形アノマリー c や a が非常に大きな極限を考えていることに対応する．

d 次元のポワンカレ対称性を $d+1$ 次元の時空の対称性として実現すると，$d+1$ 次元の時空の計量 g_{MN} をワープ因子 $f(r)$ を除いて

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{MN}dx^M dx^N \\ &= f(r)(\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu)+dr^2 \end{aligned} \tag{8}$$

と書くことができる（$\eta_{\mu\nu}$ は d 次元ミンコフスキー計量で，$M=(\mu,r)$ は $d+1$ 次元の添え字である）．さらに，スケール変換で不変であるという要求をして，A'_* を定数として $x^\mu \to e^{A'_*\lambda}x^\mu$, $r\to r-\lambda$ における計量の不変性を要求すると，$f(r)=e^{2A'_*r}$ と計量の座標依存性が完全に決定される．このとき，計量 (8) は AdS 空間として知られていて，$SO(2,d)$ のアイソメトリーを持つ極大対称空間である．すなわち，時空は，ポワンカレ対称性とスケール対称性に加えて，特殊共形変換に対応するアイソメトリーを持つ．

以上の構成から示唆されるように，非自明な繰り込み変換を持つ理論の重力的な記述は非自明なワープ因子 $f(r)=e^{2A(r)}$ を持つ時空のダイナミクスとして理解できると思われる．多少天下りであるが，$A'(r)=\frac{dA(r)}{dr}$ として**ホログラフィック a-関数**

$$a(r)=\frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)(A'(r))^{d-1}} \tag{9}$$

という量を考える．スケール変換に対する応答 $\frac{da}{dr}$ を計算したいわけであるが，今，考えてい

る重力理論が古典的なアインシュタイン方程式 $R_{MN}-\frac{R}{2}g_{MN}=T_{MN}$ を満たしているとしよう．ここで，T_{MN} は $d+1$ 次元の物質のエネルギー運動量テンソルである．すると，アインシュタイン方程式から $a(r)$ の r 微分をエネルギー運動量テンソルの r 方向の成分 $T^r{}_r$ と時間方向の成分 $T^t{}_t$ を使って書き換えることができて

$$\frac{da}{dr}=-\frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)(A'(r))^d}(T^t{}_t-T^r{}_r) \quad (10)$$

となる．

ここで，いわゆる一般相対性理論におけるエネルギー条件という概念を想起したい．とりわけ，すべてのヌルベクトル k^M（つまり $k^M k_M=0$）に対して $k^M k^N T_{MN}\geq 0$ であるべしという**ヌルエネルギー条件**は，時空の安定性と因果律の成立に重要な役割を果たしていると信じられている．今の場合に重力理論の物質場のエネルギー運動量テンソルがヌルエネルギー条件を満たしているとすると，$T^r{}_r-T^t{}_t\geq 0$ である．よって，$r=\log\mu$ であるというホログラフィック対応と，アインシュタイン方程式の帰結である式 (10) からスケール変換に対して $a(r)$ は単調減少であり，ホログラフィックな a-定理が示されたことになる．

超弦理論の近似である超重力理論では典型的な物質場は非線形シグマ模型で与えられる．するとエネルギー運動量テンソルは，Φ^i を r にのみ依存する非線形シグマ模型のスカラー場，G_{ij} を非線形シグマ模型上の計量として，

$$T^r{}_r-T^t{}_t=G_{ij}\partial^r\Phi^i\partial_r\Phi^j \quad (11)$$

となっている．この式は，AdS/CFT 対応によってスカラー場の $r=\log\mu$ 方向の変化分 $\partial_r\Phi^i$ を場の量子論の結合定数の繰り込み群による変化分 β^i とみなすことで，ちょうど式 (5) と一致していることがわかる．ヌルエネルギー条件は計量 G_{ij} の非負性に他ならない．非線形シグマ模型の立場では，理論のユニタリ性から計量に非負であるよりも強い正値性を要求する．この場合，厳密なヌルエネルギー条件と呼ばれるエネルギー条件が適当であり，その仮定の下で，スケール不変な重力解は必ず共形不変になるということが示せる[10]．

本節での議論と場の量子論の議論を結びつけるためには，このように定義されたホログラフィック a-関数が共形アノマリーと等しいことを示す必要がある．これは以上の議論で仮定されてきた平坦な d-次元の計量を，一般の曲がった計量に置き換えて，ホログラフィックな計算を遂行すればよい．特に，$d+1$ 次元時空の計量の振舞いは，d 次元時空の場の量子論のエネルギー運動量テンソルの振舞いを規定する．その結果，偶数次元ではホログラフィック a-関数の固定点での値は対応する共形場の理論の共形アノマリーを再現する．

慧眼な読者は本節のこれまでの議論において，d が奇数であることと偶数であることに本質的な差異がなかったことに気づくであろう．ホログラフィックな場の量子論の記述は奇数次元においても c-定理（あるいは a-定理）に相当する定理を予言する．その解釈について，例えば論文[11]では，奇数次元の共形場の理論に対する d 次元球上での分配関数，あるいは，エンタングルメントエントロピーの普遍的な振舞いをする部分と考えられるということが議論されている．

6. タイムマシンはできるか？

前節のホログラフィックな a-定理の証明における鍵はヌルエネルギー条件であった．もしヌルエネルギー条件が正しいとすると（一般相対性理論の枠内で）タイムマシンを作ることはできないと信じられている[12]．だから前節のホログラフィックな a-定理が成り立つと信じることはタイムマシンを作ることができないと信じることと等価である．かくして，場の量子論の自由度を勘定することで繰り込み変換は単調かどうか調べるという問題は，超弦理論の数理を通してタイムマシンはできるかという一般相対性理論の（あるいは SF の？）問いにつながっていることがわかった．

ただし，タイムマシンができないことが a-定理が証明されたことによって示されたと言うのは言いすぎである（a-定理の証明自体の微妙さ，ホロ

グラフィーの正しさは抜きにしても）．と言うのは，ホログラフィックな a-定理におけるヌルエネルギー条件は十分条件であって，必要条件ではないからである．ヌルエネルギー条件を破るような解が直ちに，a-定理と矛盾するわけではないことに注意しないといけない．ただし，a-定理がその破れに対して強い拘束を課しているのは事実であろう．一方で，量子効果はヌルエネルギー条件を破ることも知られている．より精密なホログラフィックな a-定理の定式化が望まれる．

振り返ってみると，場の量子論からの説明にしても，ホログラフィックな説明にしても，ユニタリ性や因果律といった，「時間」の概念の存在が繰り込み群の単調性に重要な意味を持っていた．ウィルソンは統計力学を念頭において繰り込み群を考えていたと思われるが，本稿で議論した定理や予想は時間の概念を持たないユークリッド場の理論で記述される統計系には必ずしも適用できないことは注意しておくべきである．繰り込み群の本質を捉えようとするとき，筆者は時間とは何かと考えざるを得ない．量子重力への応用を通じて超弦理論の数理が明快な説明を与えることを期待して筆を置きたい．

参考文献

1) K.G. Wilson and J.B. Kogut, *Phys. Rept.* **12**, 75 (1974).
2) S. El-Showk, M.F. Paulos, D. Poland, S. Rychkov, D. Simmons-Duffin and A. Vichi, arXiv:1203.6064 [hep-th].
3) J. Polchinski, *Nucl. Phys. B* **303**, 226 (1988).
4) A.B. Zamolodchikov, *JETP Lett.* **43**, 730 (1986).
5) J.L. Cardy, *Phys. Lett. B* **215**, 749 (1988).
6) H. Osborn, *Nucl. Phys. B* **363**, 486 (1991).
7) Z. Komargodski and A. Schwimmer, *JHEP* **1112**, 099 (2011) [arXiv:1107.3987 [hep-th]].
8) M.A. Luty, J. Polchinski and R. Rattazzi, arXiv: 1204.5221 [hep-th].
9) Y. Nakayama, arXiv:1110.2586 [hep-th].
10) Y. Nakayama, *Int. J. Mod. Phys. A* **25**, 4849 (2010); Y. Nakayama, *Eur. Phys. J. C* **72**, 1870 (2012) [arXiv:1009.0491 [hep-th]].
11) H. Casini, M. Huerta and R.C. Myers, *JHEP* **1105**, 036 (2011) [arXiv:1102.0440 [hep-th]].
12) S.W. Hawking, *Phys. Rev. D* **46**, 603 (1992).

（なかやま・ゆう，東京大学国際高等研究所カブリ数物連携宇宙研究機構，カリフォルニア工科大学）

F-理論の数理

素粒子模型の記述に関連して

渡利　泰山

1. M-理論，F-理論，超弦理論の双対性

1.1 弦理論の双対性

弦理論とは何か，を一言で説明するのは非常に難しい*1)．現時点で，「弦理論」が完成品に達しているとはほとんどの研究者が考えてはいないからだ．(物理になじみのある人向けに) たとえるならば，Schrödinger 方程式に到達する以前に，量子論を Bohr の対応原理で取り扱っていたような，そんな感じと言えばよいだろうか．

現時点で，(比較上もっとも) 体系だった弦理論の説明は，複数の「弦理論のスナップショット」を貼り合わせることによって行われる．I 型超弦理論，IIA 型超弦理論，IIB 型超弦理論，$E_8 \times E_8$ 混成弦理論，$SO(32)$ 混成弦理論，というのが，比較的よく知られているスナップショットにつけられた名前である．一つ一つの写真は，弦理論全体の姿を必ずしも収めていないかもしれないが，それらをフル活用することで，超弦理論全体の姿を理解しよう，という作戦である．群盲象をなでる，の類ではあるかもしれないが，手を拱いて時の流れるに任せるよりは少なくともマシだろう．

*1) この種類の記事は，i) 内容を思いっきり絞って，self-contained に確実に何かを理解してもらう，ii) 論理的に理解できるよう導くことはあきらめ，全体像や雰囲気 (key words とその間の関係) だけをなんとなく伝えようとする「お話」作戦，の 2 通りに分かれる．私自身が読者なら ii) のスタイルは大っ嫌いなのだが，編集部からいただいたテーマと注文の下，i) のスタイルで書ける気がしません．なので，ii) で．ご容赦を．

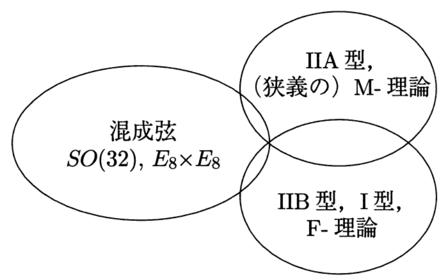


図 1　“弦” 理論の解の空間 (の一部) のイメージ図．

上記 5 つの有名なスナップショットに加えて，あと 2 つ，スナップショットが存在し，そこには，上記 5 つのスナップショットには含まれていない “弦” 理論の一側面が現れていることが知られている．この 2 つのスナップショットには，(狭義の) M-理論，F-理論，という名前がつけられている．上記の 5 つの弦理論が (1 次元の弦の) 世界面の上の超対称共形不変な場の理論を用いて記述されているのに対して，この (狭義の) M-理論や F-理論は，そのような「弦」の理論ではないということは分かっている*2)．それ以外には，あまり多くのことが分かっておらず，今のところ，きわめて焦点のぼやけたスナップショットのままになっている．

これら，弦理論のいろいろな側面を，(無理を承知で) 貼り合わせてみると，図 1 のような感じになる．例えば IIA 型超弦理論と IIB 型超弦理論で共通領域があるのは，超弦理論の解に，IIA 理

*2) それゆえ，この “弦” 理論の体系の全体を，「弦理論」ではなく (広義の) M-理論と言うこともある．

論でも IIB 理論でも記述が可能なものがある（ミラー対称性），という事実に対応する．また，超弦理論には，IIA（もしくは IIB）型弦理論と混成弦理論の両方で記述される解も存在する（本特集の立川さんの記事および，本記事以下を参照のこと）．このような複数の記述が存在する状況は，双対性と呼ばれていて，超弦理論の統一的理解に至る上で，非常に興味深い現象である．また，図 1 自体も，超弦理論について現時点までに十分よく理解されている事柄の一部を絵解きしたものに過ぎず，超弦理論の解の全体像や，理論の統一的構造は，将来の重要な研究課題である．

1.2 IIA 型超弦理論と（狭義の）M-理論の双対性

前段で述べた双対性（同一物に対する異なる記述）に，いくらか具体性を持たせた説明を試みよう．ここでは，IIA 型超弦理論と（狭義の）M-理論の間の関係を例にとる．

IIA 型超弦理論は，点粒子の代わりに空間的に 1 次元の物体（弦）を基礎的対象として，その時間発展を記述する理論である．弦は，端のないループ状（閉弦）をなせば 10 次元時空を動くことができ（図 2 (a)），一方，端のある場合（開弦）には 10 次元時空のうちの奇数次元の部分空間に端の位置が制限される（図 2 (b)）．この制限された位置の部分空間のことを一般に D-brane と呼び，$p+1$ 次元部分空間である場合，Dp-brane と呼ぶ．一方，（狭義の）M-理論は，すでに述べたように理論の定式化が現在のところ精密には知られていない；確実に分かっているのは，それが低エネルギーでは $10+1$ 次元時空の超重力理論になること，そして，その理論には，$2+1$ 次元的広がりをもつ，M2-brane（membrane）と呼ばれるソリトン解が存在することである．

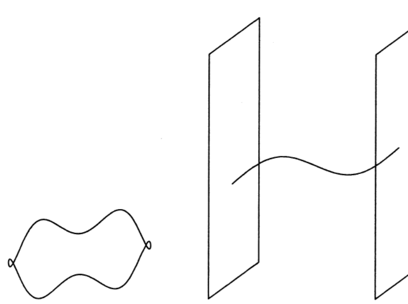


図 2　閉弦 (a) は 10 次元時空全体を動き回れるが，開弦 (b) は，端点の位置が特定の部分空間に制限される．IIA 型超弦理論の場合，奇数次元の部分空間であり，IIB 型超弦理論の場合，偶数次元である．

IIA 型超弦理論では，D6-brane が N 枚平行に並んでいる状況を設定すると，そこに端点をもつ開弦の状態を調べることで，$U(N)$ ゲージ理論の自由度があることが分かる．図 2 (b) の状況では，$U(2)$ ゲージ理論となる．一方，（狭義の）M-理論からも同様のゲージ理論が得られる，とするなら，それはどのようにして可能なのだろうか？

（狭義の）M-理論は，（上述したように）低エネルギーでは 11 次元時空上の超重力理論になるのだから，そこにはゲージ理論は含まれていないように見える．しかし，この（狭義の）M-理論において，次のような背景重力場（計量）を仮定しよう；時空の $10+1$ 次元のうち，$6+1$ 次元を通常の Minkowski 計量とし，残りの実 4 次元空間部分を，multi-centered Taub-NUT space と呼ばれる計量だとする．この Taub-NUT space は，$(\tau,\vec{y})=(\tau,y_{i=1,2,3})\in[0,2\pi R]\times\mathbf{R}^{3,1}$ を空間座標とし，計量は $\vec{y}_{I=1,\cdots,N}$ を媒介変数として，以下で与えられる．

$$\begin{aligned}
&ds^2_{TN}=V^{-1}(d\tau+A_i dy^i)^2+V(d\vec{y})^2,\\
&V(\vec{y})=1+\sum_I\frac{(R/2)}{|\vec{y}-\vec{y}_I|},\\
&\vec{\nabla}\times\vec{A}=\vec{\nabla}V(\vec{y}).
\end{aligned}\qquad(1)$$

この空間は，$\vec{y}$ を座標としてもつ $\mathbf{R}^3$ の各点の上に，円周 $2\pi R/\sqrt{V}$ の S^1 が乗っている，と見ることができる．そして，$\vec{y}=\vec{y}_{I=1,\cdots,N}$ で指定される $\mathbf{R}^3$ 内の N 個の点において，$V(\vec{y})\to\infty$，ゆえに S^1 の円周長がゼロになる，という性質を持つ．この状況を絵に描くと，図 3 になる．この特殊な N 個の点の任意の 2 つの間を結ぶ区間の上の S^1 を連ねれば，位相的に非自明な S^2 ができている

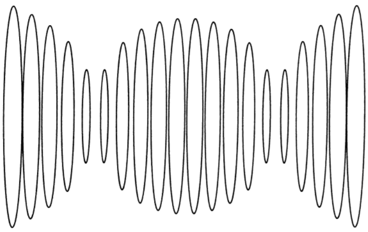


図 3 multi-centered Taub-NUT space では，S^1 の周長が $\vec{y} \in \mathbf{R}^3$（図中横軸）によって変化し，とくに $\vec{y} = \vec{y}_{I=1,\cdots,N}$ の N 個の点の上では，周長がゼロになる．

(図 3)．そのため，（狭義の）M-理論で，ソリトン M2-brane をこの S^2 に巻いたとき，S^1 の半径よりも十分に大きな距離の物理のみを見る（長距離極限，低エネルギー極限）ならば，それは図 3 のノード間を横方向に伸びる 1 次元的な object，すなわち図 2 (b) のような弦に見える．IIA 型超弦理論における開弦は，（狭義の）M-理論ではこのようにして得られ，その端点が制限される部分空間，D6-brane の役割は，multi-centered Taub-NUT space の center, $\vec{y} = \vec{y}_I$ が担うことになる．

この IIA 型超弦理論と（狭義の）M-理論との間の双対性の画期的なことのうちの一つは，IIA 理論では開弦によって実現されるところのゲージ理論が，M-理論では純粋に重力（幾何）の理論の一部として実現されることである．上記の例で扱っている例では，$U(N)$ ゲージ理論であるが，その $SU(N)$ 対称性が回復するのは，multi center がみな一致するとき，つまり $\vec{y}_1 = \vec{y}_2 = \cdots = \vec{y}_N$ の状況であり，実はこのとき，この実 4 次元空間に複素構造を導入して，$\mathbf{C}^2/\mathbf{Z}_N$ とみなすことができる．$SU(N)$ ゲージ理論を実現できるのは，A_{N-1} 特異点をもつ幾何（$\mathbf{C}^2/\mathbf{Z}_N$）を（狭義の）M-理論に用いたとき，ということであり，ゲージ理論と幾何との間に美しい対応関係を見ることができる．標語的に言えば，ゲージ理論の幾何化，である．

$\mathbf{C}^2/\mathbf{Z}_N$ とその原点にある特異点（A_{N-1} 特異点）は，複素 3 変数 (x, y, z) の間に一つの代数方程式

$$A_{N-1}: \quad y^2 = x^2 + z^N \tag{2}$$

を与えることによって決まる複素曲面と，その $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ にある特異点，と見ることができる．しかし，すべての複素曲面の特異点がこの形をしているわけではない．D_n 型，および E_n 型として知られる特異点は，以下の代数方程式で与えられる曲面にある．

$$D_n: \quad y^2 = x^2 z + z^{n-1}, \tag{3}$$

$$E_6: \quad y^2 = x^3 + z^4, \tag{4}$$

$$E_7: \quad y^2 = x^3 + xz^3, \tag{5}$$

$$E_8: \quad y^2 = x^3 + z^5. \tag{6}$$

それゆえに，式 (1) の multi-centered Taub-NUT space の代わりにこれらの空間（と，$\vec{y}_I$ のような媒介変数による変形をしたもの（立川さんの記事を参照のこと））を（狭義の）M-理論の背景時空として用いれば，A_{N-1} 型のゲージ理論ではなく，D_n 型，あるいは，E_6, E_7, E_8 型のゲージ群をもつゲージ理論を実現することができる．D_n 型のゲージ理論ならば，IIA 型超弦理論でも D6-brane と O6-plane の組合せで実現することができる（すなわち，双対な記述が存在する）．しかし，E_6, E_7, E_8 型の $6+1$ 次元時空の上のゲージ理論は，IIA 型超弦理論の D6-brane や O6-plane の組合せでは実現することができない．この観点からすると，（狭義の）M-理論は，IIA 型超弦理論では実現することができない種類の一群の解を，純粋に幾何的なデータを用いることによって記述することができる，ということになる．

1.3 F-理論

「（狭義の）M-理論に ADE 型特異点を持つ背景幾何を用いることが，IIA 型超弦理論に D6-brane や O6-plane を含んだ設定を用いることの拡張になっている」のと同様に，IIB 型超弦理論に D7-brane や O7-plane を含んだ設定を用いることについても，それを拡張する理論の枠組みが存在するだろう，と諸般の事情から考えられている．その（存在するであろう）枠組みには F-理論という名前がつけられている（図 1）．

すでに冒頭の 1.1 節で述べたように，現時点では，F-理論は詳細まできちっと詰めきった理論体

系には至っていない．（狭義の）M-理論には，「低エネルギー極限では，10 + 1 次元時空上の超重力理論になるはず」ということが分かっていたが，F-理論についてはその水準のことすらハッキリとは分かっていない．それではあまりにも不確かで頼りないように見えるかもしれないが，超弦理論の双対性や理論の数学的構造，物理的直観を有機的に組み合わせて，その理論的枠組みの真の姿に少しずつ迫っていくのが，物理屋の流儀である．

現時点で分かっている範囲では，F-理論の解*3)の記述には $(X_n, \omega, C^{(3)})$ という幾何データを用いる．X_n は，elliptic fibered Calabi–Yau n 次元多様体，$\pi : X_n \to B_{n-1}$ は elliptic fibration であって，fiber が Weierstrass 方程式で与えられるものとする．

$$y^2 = x^3 + fx + g. \tag{7}$$

f と g は，それぞれ底空間 B_{n-1} 上の $\mathcal{O}_B(-4K_B)$ と $\mathcal{O}_B(-6K_B)$ の大域的正則切断である．ω は B_{n-1} 上の Kähler form，そして，$C^{(3)}$ は，X_n 上の 3-form である*4)．これは，IIB 型超弦理論の解の記述に $(X'_{n-1}, \mathcal{I}, \omega, \mathcal{F}, C^{(2)}, B^{(2)})$ を用いることの一般化（統一的記述）に相当する；X'_{n-1} は Calabi–Yau $n-1$ 次元多様体，$\mathcal{I} : X'_{n-1} \to X'_{n-1}$ は，$\mathcal{I}^2 = \mathbf{id}_{X'}$ なる正則写像，ω, $\mathcal{F}$, $C^{(2)}$, $B^{(2)}$ はそれぞれ X' 上の Kähler form, $\mathcal{O}_{X'}$-module の層，そして 2 種類の 2-form である*5)．

この拡張に際し，$n-1$ 次元多様体 X'_{n-1} に elliptic fiber を付け加えて n 次元多様体 X_n とするのは，fiber の楕円曲線の $SL(2, \mathbf{Z})$ が IIB 型超弦理論の $SL(2, \mathbf{Z})$ 対称性を幾何的に実現できるからである．ベクトル束の切断が関数の拡張概念であるように，楕円曲線の非自明な fibration を考えることで，IIB 型超弦理論の拡張が可能になる．

IIB 型超弦理論では，X'_{n-1} の複素余次元 1 の部分多様体 $i_D : D \hookrightarrow X'$ の上の rank N の正則ベクトル束 $\mathcal{E}$ を用いて $i_{D*}(\mathcal{E})$ と書ける成分が $\mathcal{F}$ の中にあるとき（つまり D7-brane が N 枚あるとき），その解には，$A_{N-1} = SU(N)$ 型のゲージ理論が含まれている．このような解は，F-理論では，B_{n-1} の中の複素 1 次元の部分多様体 C を取ってきたときに，$\pi^{-1}(C)$ が A_{N-1} 型特異点を持つ状況に相当している．II 型超弦理論では D-brane によって実現されているゲージ理論を，純粋な特異点をもつ幾何で表してしまう，という点で，F-理論は（狭義の）M-理論と共通する性質をもつ．そして，F-理論においても，（狭義の）M-理論と同じく，$\pi^{-1}(C)$ が E_6, E_7, E_8 型の特異点をもつような X_n を用いれば，E_6, E_7, E_8 型のゲージ群のゲージ理論を実現できるのである．

「このような例外系の代数構造があれば，素粒子物理の超対称統一理論で必要とされるある種の湯川相互作用を作り出すことができる」ということが知られていて，弦理論への純理論的な興味や，その数学的構造への興味の他に，この物理的理由もあって，F-理論をよりよく理解することに興味がもたれている．

2. いろいろな次元での F-理論

2.1 elliptic fibered X_2 を用いて

F-理論の最も簡単なクラスの解は，X_n として $n = 2$ の elliptic fibered K3 多様体*6)を用いるもので，elliptic fibration の底空間 B_{n-1} は，複素 1 次元の $\mathbf{C}P^1$ である．IIB 型超弦理論を複素 1 次元の X'_{n-1} でコンパクト化するときと同様に，十分に低エネルギーでは，7 + 1 次元時空の上の場の理論になる．IIB 型超弦理論ならば，物理の理論としては十分に精密に定式化されているた

*3） 理論や方程式はよく分かっていないけど，その解の記述の仕方は分かっている，というのは奇異に聞こえるかもしれないが，ここは，「でも，そうなんです.」とのみ言っておこう．

*4） X_n に関しては，Weierstrass 方程式では与えられていない elliptic fibered Calabi–Yau n-次元多様体では F-理論の解にはなり得ないかどうか，現時点では不明である．$C^{(3)}$ が持つべき性質については，本稿の後のほうでもう少し明確にする．

*5） 大雑把に言って，B_{n-1} が $X'_{n-1}/\mathcal{I}$ に相当し，elliptic fibration $\pi : X_n \to B_{n-1}$ の判別式集合 $\{\Delta = 0\}$ が $\mathcal{F}$ の support になる．そして，$C^{(3)}$ が $\mathcal{F}$ の support 以外の情報（接続，曲率など）と $C^{(2)}$, $B^{(2)}$ を含む．

*6） Calabi–Yau 2 次元多様体のことを K3 多様体と呼ぶ．また，このクラスの解では，$C^{(3)} = 0$ とする．

め，$(X'_{n-1}, \mathcal{I}, \omega, \mathcal{F}, C^{(2)}, B^{(2)})$ のデータからどのような $7+1$ 次元時空上の場の理論になるかを導くことができる．

F-理論の場合，elliptic fibered K3 曲面 X_2 に A_{N-1}, D_n, E_n 型の特異点があるとしよう；それらの特異点は，elliptic fibration の底空間 $B_{n-1} = \mathbf{C}P^1$ の点に対応する．このとき，低エネルギーでは，「それらの点 $\times \mathbf{R}^{7,1}$」の時空の上の，$SU(N)$, $SO(2n)$, E_n のゲージ群を持つ，最大の超対称性を持つ super Yang–Mills 理論が実現される．「$7+1$ 次元時空の最大の超対称性をもつ Yang–Mills 理論のゲージ群 $G_1 \times G_2 \times \cdots$ として，どのような A-D-E 型の群の $G_{1,2,\ldots}$ の組合せが可能なのか？」という物理の問いの答えは，「elliptic fibered K3 多様体の複素構造を変えることで，どのような特異点の組合せが実現できるか？」という数学の問題に置き換えられる．

多少細かい話になるが，F-理論の解を指定するデータが，「Weierstrass 方程式で与えられる，特異点を持ち得る X_2」であるのか，それとも「その特異点を解消した $\tilde{X}_2$」であるのかは，今のところよく理解されてはいない．現時点では，F-理論とは，「解の分類をする幾何データ」と，「解の低エネルギーで得られる場の理論」との間の「対応関係を（状況証拠をもとにして）推定する」枠組みにとどまっている．そのため，X_2 とその特異点の解消 $\tilde{X}_2$ との間の関係は不定性がないことから，X_2 もしくは $\tilde{X}_2$ のどちらが本当の幾何データなのかを決定することはできていない．

なお，elliptic fibered K3 多様体の複素構造のモジュライ空間は，

$$SO(2,18;\mathbf{Z})\backslash SO(2,18)/SO(2) \times SO(18)$$

であり，これが，混成弦理論の T^2 によるコンパクト化のモジュライ空間と完全に一致する，という事実がある．この現象を混成弦理論と F-理論の間の双対性と言う（図 1 の左下の共通部分）．この双対性は，本特集の立川さんの記事で解説されている混成弦と II 型超弦理論の間の双対性に対して，その変奏曲とも言うべき内容である．

2.2 elliptic fibered X_3 を用いて

F-理論の解のクラスをもう一段広げるには，X_n として $n = 3$ の elliptic fibered Calabi–Yau 3 次元多様体を用いればよい．低エネルギーでは，$5+1$ 次元の時空の上の超対称場の理論が得られるはずで，i) 幾何データ $(X_n, \omega, C^{(3)})$ と低エネルギーでの場の理論との対応関係を調べること，そして，ii) 幾何データの数学から得られる制約を用いて，実現可能な場の理論への制約を導くこと，の 2 点が問題の焦点である．

2.1 節で登場した A_{N-1}, D_n, E_n 型の特異点と $\{$特異点$\} \times \mathbf{R}^{7,1}$ の上の super Yang–Mills 理論の間の対応関係は，以下のように一般化される．まず，Weierstrass 方程式から判別式を $\Delta = 4f^3 + 27g^2$ で定義し，底空間 B_{n-1} の中の複素余次元 1 の部分多様体，判別式集合 D を $\Delta = 0$ で指定する．D を既約成分に分解し，$D = \sum_i n_i D_i$ としよう．D_i の一般の点の上では，複素余次元 1 の方向に複素曲線 $C \subset B_{n-1}$ を採れば，その上では $\pi^{-1}(C) \to C$ が elliptic fibration のある複素曲面になる．この曲面 $\pi^{-1}(C)$ に A-D-E 型の特異点が存在するか，（あるいは smooth か）を論ずることができる．特異点になっている場合，その型に従い，低エネルギーでは，$D_i \times \mathbf{R}^{5,1}$ 上の super Yang–Mills 理論が対応することになる．

この 2.2 節では $n = 3$ の場合を考えているから，B_{n-1} は複素曲面であり，D_i は複素曲線である．判別式集合の異なる既約成分 D_i, D_j が交点を持つとき，数学としても，物理としても面白い現象が起きる．数学としては X_3 がより複雑な特異性をもつことになる．物理としては，$D_i \times \mathbf{R}^{5,1}$ と $D_j \times \mathbf{R}^{5,1}$ の上のゲージ群の下で非自明な変換を示す（charge を持っている）物質場が $(D_i \cap D_j) \times \mathbf{R}^{5,1}$ に存在する，ということが，混成弦理論との双対性を用いて導かれている．

2.3 elliptic fibered X_4 を用いて

現実世界の時空は，これまでの実験が分解できる程度の長さスケールの範囲（最短で 10^{-19} m くらい）では $3+1$ 次元に見えている．そのため，$X_{n=2,3}$ を用いた F-理論の解では現実世界を記述

するのは不適切である．次元を1つ上げて，$n=4$ の elliptic fibered Calabi–Yau 4次元多様体 X_4 を用いれば，低エネルギーで $3+1$ 次元時空の上の超対称ゲージ理論を実現することができる．

この $n=4$ の場合は，底空間 B_{n-1} が複素3次元多様体，そして判別式集合 $D=\sum_i n_i D_i$ の既約成分 D_i が複素曲面になる．低エネルギーでは，2.2節と同じ手続きで決まるゲージ群を持ったゲージ理論が $D_i \times \mathbf{R}^{3,1}$ に実現され，$(D_i \cap D_j) \times \mathbf{R}^{3,1}$ の上には物質場が存在する．$n=4$ の場合には，複素曲線 $(D_i \cap D_j)$ の中でさらに X_4 の特異性が増すような点も見つかる．そのような点の周りの幾何からは，物質場の間の相互作用（湯川相互作用）が生成されるはずである．

この幾何と湯川相互作用の間の対応関係についての研究が，過去数年の間に大きな進展を見た．その内容を，残りの紙幅の中で大雑把に説明しよう．まず話を具体的にすべく，$S \subset B_3$ を複素余次元1の部分多様体とし，s および $\tilde{a}_{i=2,3,4,6}$ をそれぞれ $\mathcal{O}_{B_3}(S)$, $\mathcal{O}_{B_3}(-iK_{B_3}-(i-1)S)$ の B_3 上の大域的正則切断として，X_4 を

$$y^2 + s^2\tilde{a}_3 y = x^3 + s\tilde{a}_2 x^2 + s^3\tilde{a}_4 x + s^5 \tilde{a}_6$$

で与えることにしよう；fiber 座標 (x,y) の再定義をすれば，Weierstrass 型 (7) に持っていくことは可能である．このとき，判別式集合は，$D=7S+\cdots$ と S を既約成分として含む．実は，この形は $S\times\mathbf{R}^{3,1}$ 上に $SO(10)$ ゲージ群をもつ超対称ゲージ理論を実現するための最も一般的な X_4 の形である．そして，

$$\Delta = s^7\left[\tilde{a}_2^3\tilde{a}_3^2 + \mathcal{O}(s)\right] \qquad (8)$$

となっていて，S 上で $\tilde{a}_2=0$ もしくは $\tilde{a}_3=0$ となるところが，$S\cap(D-7S)$ である．混成弦理論との双対性から，$\tilde{a}_2|_S=0$ の複素曲線上には $SO(10)$ のスピノール表現に従う物質場が，そして，$\tilde{a}_3|_S=0$ の複素曲線上には $SO(10)$ のベクトル表現の物質場が存在することが分かっている．

$\tilde{a}_2|_S=0$ かつ $\tilde{a}_3|_S=0$ になる S 上の点の周りでは，上記2種類の物質場が出会い，湯川相互作用が起きる．低エネルギーの場の理論の作用に現れる湯川相互作用の係数と，幾何データ $(X_4,\omega,C^{(3)})$ との間の関係をきっちりつけるためには，まず，そのような S 上の点の周りに近傍 $U\subset S$ を採り，この U を含む X_4 内の局所幾何のデータを $U\times\mathbf{R}^{3,1}$ 上のゲージ理論に焼きなおす．そのゲージ理論の低エネルギーでの振舞いを調べることで，湯川相互作用の係数が求まるのだ．

U を含む X_4 内の局所幾何の情報（$\tilde{a}_{2,3}|_U$ など）は，Hitchin 写像（の逆写像）を用いて，U 上の「標準束 K_U に値を持つ Higgs 束 $(V,\rho(\varphi)\in H^0(U;(\mathrm{End}\rho(V))\otimes K_U))$」に焼きなおされ，ベクトル束 V の接続と φ が $U\times\mathbf{R}^{3,1}$ 上のゲージ理論の背景場として使われる．[構造群は，$U(2)$, $SU(4)$ など．$SO(10)$ と合わせて E_7 や E_8 に含まれる．] あとは，物理としては一直線のプロセスである．その結論を数学の言語で語るなら，まず，$SO(10)$ のスピノール表現とベクトル表現の物質場が各々 Higgs 束の表現 $\rho(V)=V$ と $\rho(V)=\wedge^2 V$ に相当し，U 上のベクトル束 $\rho(V)$ に対応して，$\pi_{\mathbb{K}_U}:K_U\to U$ の全空間 $\mathbb{K}_U$ の上の層 $\mathcal{V}_\rho$ が $\pi_{\mathbb{K}_U *}(\mathcal{V}_\rho)=\rho(V)$ となるように構成される（Higgs 層と呼ばれる）．そして物質場は，$\mathbb{K}_U$ 上の $\mathrm{Ext}^1(i_*\mathcal{O}_U,\mathcal{V}_\rho)$ で表される．IIB 型超弦理論での X'_3 と $\mathcal{H}om(\mathcal{F},\mathcal{F})$ の役割を，$\mathbb{K}_U$ と $\mathcal{V}_\rho$ が担うことになる．Ext^1 群の次元が世代数，そして Yoneda pairing が湯川相互作用（の係数）を与える．

これを現実世界の記述と見るなら，「我々の世界用の X_4 の複素構造」がどのようにして決まるかは大変に興味深い．弦理論や宇宙論の考察上，$[dC^{(3)}]$ は $H^{2,2}(X_4)\cap H^4(X_4;\mathbf{Z})$ に属せねばならないこと，さらに，この格子のランクが大きくなる特殊な複素構造が望ましいことが分かっている．数学としては，複素構造モジュライ空間上での代数的サイクルの数の変化の問題の一例，そして elliptic K3 の Mordell–Weil 格子の分類問題の一般化であるが，この方面のよりよい理解，進展には，私自身大いに興味を持っている．

（わたり・たいざん，東京大学国際高等研究所カブリ数物連携宇宙研究機構）

量子ダイログ関数と団代数



中西　知樹

1. はじめに

本稿のタイトルのキーワードの一つである**量子ダイログ関数**（quantum dilogarithm）は，正確に言えば2つのバージョンがあるのだが，Faddeev が Kashaev, Volkov とともに，90年代半ばに離散 Liouville 模型の研究において導入したものである．その後，結び目不変量と3次元双曲体積を結びつける Kashaev の**体積予想**に現れるなどその重要性が認識された．最近では弦理論の研究者たちによって Chern–Simons ゲージ理論，あるいは超対称ゲージ理論における BPS 状態の数え上げなどの文脈においても活発に研究が行われている．

タイトルのもう一方のキーワードである**団代数**（cluster algebra）は2000年頃に Fomin と Zelevinsky によって導入された可換代数のクラスであるが，こちらも，多元環，リー群，量子群などの表現論，三角圏の理論，リーマン面の三角分割やモジュライ理論など，様々な数学の分野と関わりながら急速に発展を遂げている．

さて，量子ダイログ関数と団代数（正確にはその量子化である量子団代数）の間に密接な関連があることに最初に気がついたのは Fock と Goncharov で2003年頃のことであった．最近になって団代数の理論の整備が進んだ結果，Keller，長尾，Kashaev と著者らによって量子ダイログ関数のみたす恒等式である**量子ダイログ恒等式**について団代数の観点からより包括的な理解が得られるようになった．本稿ではこのあたりの事情について，団代数の技術的な詳細にはあまり立ち入らずにその雰囲気を読者にお伝えしたい．詳しい内容や文献については文献 1, 2) を参照されたい．

一方，このような流れと並行して量子ダイログ恒等式はまた Donaldson–Thomas 理論の**壁越え現象**により理解することが自然であることが Kontzevich と Soibelman，長尾らの最近の研究で明らかにされつつある．これに関する長尾氏による明解な解説[3)]を合わせてお読みいただけると良いと思う．

2. ダイログ関数

はじめに「古典的な」ダイログ関数を導入しよう．任意の自然数 k に対して，以下のベキ級数

$$\mathrm{Li}_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^k} \tag{1}$$

は収束半径 1 となる．$k=1$ のとき，$\mathrm{Li}_1(x) = -\log(1-x)$ であることから，一般の k に対して $\mathrm{Li}_k(x)$ を k 次の**ポリログ関数**（polylogarithm）という．特に $\mathrm{Li}_2(x)$ を**ダイログ関数**（dilogarithm）あるいは後述の関数 $L(x)$ と区別するときは **Euler のダイログ関数**ともいう．$(\mathrm{Li}_2(x))' = \mathrm{Li}_1(x)/x$ であるので，$\mathrm{Li}_2(x)$ は積分表示

$$\mathrm{Li}_2(x) = -\int_0^x \frac{\log(1-y)}{y} dy \tag{2}$$

を持つことがわかる．これにより，$\mathrm{Li}_2(x)$ は複素

平面上に解析接続されるが，$x=1$ を分岐点に持つ．本稿ではこの多価性の曖昧さを除くため，(2) により定義される $\mathrm{Li}_2(x)$ を $x\leq 1$ なる実数に対して考える．定義より，$\mathrm{Li}_2(0)=0$ が成り立つ．また，良く知られた Euler による結果により，

$$\mathrm{Li}_2(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6} \tag{3}$$

となる．

次に，(2) の被積分関数を「対称化」した関数

$$L(x)=-\frac{1}{2}\int_0^x\left\{\frac{\log(1-y)}{y}+\frac{\log y}{1-y}\right\}dy \tag{4}$$

を考える．これを **Rogers のダイログ関数**という．この関数の解析接続は $x=0,1$ の双方に分岐点を持つので，本稿では多価性の曖昧さを除くため，$L(x)$ を $0\leq x\leq 1$ なる実数に対して考える．

部分積分により，$0\leq x\leq 1$ に対して，

$$L(x)=\mathrm{Li}_2(x)+\frac{1}{2}\log x\log(1-x) \tag{5}$$

となる．これより，$\mathrm{Li}_2(x)$ と同様に

$$L(0)=1,\quad L(1)=\frac{\pi^2}{6} \tag{6}$$

が成り立つことがわかる．

ダイログ関数の理論においては，$L(x)$ に関する以下の 2 つの恒等式が大変重要である．

定理 1　(1)（Euler の恒等式）

$$L(x)+L(1-x)=\frac{\pi^2}{6}. \tag{7}$$

(2)（ペンタゴン恒等式/Abel の恒等式）

$$L(x)+L(y)+L\left(\frac{1-x}{1-xy}\right)+L(1-xy)+L\left(\frac{1-y}{1-xy}\right)=\frac{\pi^2}{2}. \tag{8}$$

Euler の恒等式 (7) を (8) の後ろの 3 項に用いると，(8) はまた

$$L(x)+L(y)=L\left(\frac{x(1-x)}{1-xy}\right)+L(xy)+L\left(\frac{y(1-y)}{1-xy}\right) \tag{9}$$

と書くこともでき，これもペンタゴン恒等式という．

ところで，(5) を用いれば，これらの恒等式の $L(x)$ を $\mathrm{Li}_2(x)$ に置きかえることができるが，その際，余計な対数関数の項が現れる．歴史的には順序が逆で，$\mathrm{Li}_2(x)$ による表式が先にあり，$L(x)$ を導入すると対数関数項がきれいに吸収され $L(x)$ のみの関数方程式となることが後に見出された．そして，このことが関数 $L(x)$ の意義なのである．

3. ダイログ恒等式と団代数

90 年代に，可積分模型の文脈においてペンタゴン恒等式 (8) の一般化が現れ，盛んに研究された．そして，これらの恒等式の背後に存在するある種の代数構造が見え隠れはしていた．しかし，残念ながら，その時点ではまだ団代数の概念は導入されていなかった（その当時の雰囲気については 16 年前の拙稿[4)]を参照されたい）．そして，最近になって，ようやく背後にある代数構造が団代数に他ならないことが理解されたのである．

団代数というのはとても粗く言えば，各頂点から n 本の枝が出ているツリーグラフ（図 1）を考え，各頂点上に配置された n 個の変数が**変異**（mutation）と呼ばれる有理変換によって発展していくものである．したがって，ツリーの頂点を多重時間変数に持つような離散力学系と言っても良い．

団代数の詳細な定義はここでは触れずに，「A_2 型の団代数」における変数（正確には「係数」あるいは「y 変数」と呼ばれるもの）を直接的に導

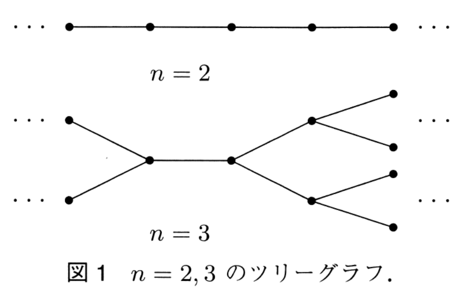


図 1　$n=2,3$ のツリーグラフ．

入する．この場合は上の n は2であり，離散的な時間変数 t は整数となる．以下では，各時刻 t に対して，2つの変数 $y_1(t), y_2(t)$ が配置され以下の規則をみたすものを考える．

(I)（初期条件） $y_1(0)=y_1,\ y_2(0)=y_2$．ここで，y_1, y_2 は独立で可換な変数（初期変数）である．

(II)（変異の規則） t が偶数のときは

$$\begin{cases} y_1(t+1)=y_1(t)^{-1}, \\ y_2(t+1)=y_2(t)(1+y_1(t)). \end{cases} \tag{10}$$

t が奇数のときは

$$\begin{cases} y_1(t+1)=y_1(t)(1+y_2(t)), \\ y_2(t+1)=y_2(t)^{-1}. \end{cases} \tag{11}$$

これを具体的に $t=0$ から始めて $t=5$ まで実行すると以下の結果が得られる．

$$\begin{aligned} &\begin{cases} y_1(0)=y_1, \\ y_2(0)=y_2, \end{cases} \\ &\begin{cases} y_1(1)=y_1^{-1}, \\ y_2(1)=y_2(1+y_1), \end{cases} \\ &\begin{cases} y_1(2)=y_1^{-1}(1+y_2+y_1y_2), \\ y_2(2)=y_2^{-1}(1+y_1)^{-1}, \end{cases} \\ &\begin{cases} y_1(3)=y_1(1+y_2+y_1y_2)^{-1}, \\ y_2(3)=y_1^{-1}y_2^{-1}(1+y_2), \end{cases} \\ &\begin{cases} y_1(4)=y_2^{-1}, \\ y_2(4)=y_1y_2(1+y_2)^{-1}, \end{cases} \\ &\begin{cases} y_1(5)=y_2, \\ y_2(5)=y_1. \end{cases} \end{aligned} \tag{12}$$

最後の結果は，この変換の列が（半）周期5の周期性を持つことを意味する．このように団代数が周期性を持つとき，それに付随するダイログ恒等式が得られるというのが団代数の理論からの帰結である．以下では，特に (12) の周期に付随するダイログ恒等式がペンタゴン恒等式 (9) に他ならないことを説明しよう．

いま，$k_0, \ldots, k_4$ を

$$k_t=\begin{cases} 1 & t=0,2,4, \\ 2 & t=1,3 \end{cases} \tag{13}$$

と定める．すなわち，k_t は変異の規則 (10), (11) において，$y_{k_t}(t+1)=y_{k_t}(t)^{-1}$ をみたすもので，これを t における**前方変異点**（forward mutation point）という．また，符号 $\varepsilon_t\ (t=0,\ldots,4)$ を

$$\varepsilon_t=\begin{cases} 1 & t=0,1, \\ -1 & t=2,3,4 \end{cases} \tag{14}$$

と定める．ε_t は変数 $y_{k_t}(t)$ の (12) における初期変数 y_1, y_2 による展開の主要項のベキの符号であり，これを**トロピカル符号**(tropical sign)という．これは団代数の理論において重要なものである．

以上の記号を用いて，団代数の周期 (12) に付随するダイログ恒等式は

$$\sum_{t=0}^{4}\varepsilon_t L\left(\frac{y_{k_t}(t)^{\varepsilon_t}}{1+y_{k_t}(t)^{\varepsilon_t}}\right)=0 \tag{15}$$

で与えられる．そして，これはペンタゴン恒等式 (9) と一致する．実際，

$$\begin{aligned} x&=\frac{y_1(0)}{1+y_1(0)}=\frac{y_1}{1+y_1}, \\ y&=\frac{y_2(1)}{1+y_2(1)}=\frac{y_2(1+y_1)}{1+y_2+y_1y_2} \end{aligned} \tag{16}$$

とおくとき，

$$\begin{aligned} \frac{y_1(2)^{-1}}{1+y_1(2)^{-1}}&=\frac{y_1}{(1+y_1)(1+y_2)} \\ &=\frac{x(1-y)}{1-xy} \end{aligned} \tag{17}$$

などとなることが容易に確かめられる．

4. 量子ダイログ関数

本題の量子ダイログ関数について述べよう．

この節では $q\neq 0$ は $|q|<1$ をみたす複素数とする．このとき，無限積

$$e_q(x)=\prod_{k=0}^{\infty}(1+q^{1+2k}x). \tag{18}$$

は任意の複素数 x に対して収束し，複素平面上で正則な関数を定める．その逆数で定まる有理型関数 $\Psi_q(x)=e_q(x)^{-1}$ をここでは**量子ダイログ関数** $\Psi_q(x)$ と呼ぶ（Faddeev 自身は，$e_q(x)$ を量子ダイログ関数と呼んでいる．これ以外にも本稿の q を $q^{1/2}$ とするなど他の慣習もある）．

関数 $\Psi_q(x)$ の基本的な性質を見ておこう．まず，$\Psi_q(x)$ の定義より，$\Psi_q(0)=1$ であり，また以下の関数方程式をみたすことがすぐわかる．

$$\Psi_q(q^2x)=(1+qx)\Psi_q(x). \tag{19}$$

この2つの性質は，q と x の形式的ベキ級数としての $\Psi_q(x)$ を特徴づける．このことより，$\Psi_q(x)$ は $x=0$ における以下のベキ級数展開

$$\Psi_q(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-q)^n}{\prod_{k=1}^{n}(1-q^{2k})}x^n \tag{20}$$

$$=\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-q)^n}{n(1-q^{2n})}x^n\right) \tag{21}$$

を持つことがわかる．これらの収束半径はともに $1/|q|$ である．

次の恒等式は50年代の Schützenberger による結果で，証明は初等的である．

定理 2（q 指数性）$YX=q^2XY$ をみたす非可換な変数 X,Y に対して，以下が成り立つ．

$$\Psi_q(X)\Psi_q(Y)=\Psi_q(X+Y). \tag{22}$$

ただし，(22) はベキ級数 (20) に $X, Y, X+Y$ などを代入して得られる非可換変数 X, Y の形式的ベキ級数の等式である．

関係式 $YX=q^2XY$ は X と Y について対称ではなく，$\Psi_q(Y)\Psi_q(X)=\Psi_q(Y+X)$ とはならないことに注意する．

さて，Faddeev と Kashaev は，以下の意味で，$\Psi_q(x)$（あるいは $e_q(x)$）がダイログ関数の「量子化」であることを見出した[5)]．

定理 3 **(i)**（漸近挙動）極限 $q\to1^-$ において，以下が成り立つ．

$$\log\Psi_q(x)\sim-\frac{\mathrm{Li}_2(-x)}{2\log q}. \tag{23}$$

(ii)（ペンタゴン恒等式）$YX=q^2XY$ をみたす非可換な変数 X, Y に対して，

$$\Psi_q(Y)\Psi_q(X)=\Psi_q(X)\Psi_q(q^{-1}YX)\Psi_q(Y) \tag{24}$$

が成り立つ．さらに，$q\to1^-$ における (24) の半古典極限により $L(x)$ のペンタゴン恒等式 (9) が得られる．

(23) は (21) の極限と (1) を比べてただちに得られる．(24) は (22) と (19) を（巧みに）繰り返し適用して得られる．(ii) の後半の主張は，U, V を適当な関数空間上の作用素とみなし，(24) の両辺の適当な行列要素の $q\to1^{-1}$ の極限における漸近挙動の主要項を比べることによって (9) が得られる，という意味である．このような極限を考えることを，量子力学の用語を用いて**半古典極限**（semiclassical limit）という．

ところで，(24) は (9) を半古典極限に持つ一方で，両者の右辺の変数の形はあまり似ていない．これと関連して，Volkov は最近 (24) が以下の形に書き換えられることを見出した．

定理 4（**Volkov のペンタゴン恒等式**）$YX=q^2XY$ をみたす非可換な変数 X, Y に対して，

$$\begin{aligned}\Psi_q(X)\Psi_q(Y)&=\Psi_q((1+qX)^{-1}Y)\\&\times\Psi_q(qX(1+qX+qY)^{-1}Y)\\&\times\Psi_q(X(1+qY)^{-1})\end{aligned} \tag{25}$$

が成り立つ．

(25) の右辺も (9) の右辺とは一見似ていないが，実はこれが (9) の「表式の上での」自然な q 類似になっている．このことについては次節で説明する．

5. 量子ダイログ恒等式と量子団代数

量子団代数（quantum cluster algebra）は 2004 年頃に Berenstein, Zelevinsky と Fock, Gon-

charov の 2 つのグループによってほぼ同時に導入されたものであり，団代数の変数を「非可換化した」ものである．この詳しい定義は省いて，ここでは，3 節で述べた「A_2 型の団代数」の変数の量子化を直接的に導入する．古典的な場合と同様に，各時刻 $t \in \mathbb{Z}$ に対して，2 つの変数 $Y_1(t), Y_2(t)$ が配置され以下の規則をみたすものを考える．

(I)（**初期条件**）$Y_1(0) = Y_1, Y_2(0) = Y_2$．ここで，$Y_1, Y_2$ は独立で非可換な変数（初期変数）であり，形式的な変数 q に対して，関係式

$$Y_1 Y_2 = q^2 Y_2 Y_1 \tag{26}$$

をみたす．

(II)（**変異の規則**）t が偶数のときは

$$\begin{cases} Y_1(t+1) = Y_1(t)^{-1}, \\ Y_2(t+1) = Y_2(t)(1 + qY_1(t)). \end{cases} \tag{27}$$

t が奇数のときは

$$\begin{cases} Y_1(t+1) = Y_1(t)(1 + qY_2(t)), \\ Y_2(t+1) = Y_2(t)^{-1}. \end{cases} \tag{28}$$

これを具体的に $t=0$ から始めて $t=5$ まで実行すると以下の結果が得られる．

$$\begin{aligned} &\begin{cases} Y_1(0) = Y_1, \\ Y_2(0) = Y_2, \end{cases} \\ &\begin{cases} Y_1(1) = Y_1^{-1}, \\ Y_2(1) = Y_2(1 + qY_1), \end{cases} \\ &\begin{cases} Y_1(2) = Y_1^{-1}(1 + qY_2 + Y_1 Y_2), \\ Y_2(2) = Y_2^{-1}(1 + q^{-1}Y_1)^{-1}, \end{cases} \\ &\begin{cases} Y_1(3) = Y_1(1 + qY_2 + Y_1 Y_2)^{-1}, \\ Y_2(3) = q^{-1}Y_1^{-1}Y_2^{-1}(1 + qY_2), \end{cases} \\ &\begin{cases} Y_1(4) = Y_2^{-1}, \\ Y_2(4) = q^{-1}Y_1 Y_2(1 + q^{-1}Y_2)^{-1}, \end{cases} \\ &\begin{cases} Y_1(5) = Y_2, \\ Y_2(5) = Y_1. \end{cases} \end{aligned} \tag{29}$$

変異の列 (29) は，古典的な場合 (12) と同様の周期性を持つことがわかる．これは偶然ではなく，一般に，（ある技術的な仮定の下で）古典団代数の周期は量子団代数の周期に持ち上がることが知られている．そして，古典的な場合と同様に，量子団代数の周期に対してそれに付随した（いろいろな形の）量子ダイログ恒等式が得られるのである．以下では，特に (29) の周期に付随する量子ダイログ恒等式として 2 つのペンタゴン恒等式 (24), (25) が得られることを説明しよう．

k_t，ε_t を (13), (14) で導入したものとする．$[Y_{k_t}(t)]$ $(t = 0, \dots, 4)$ を (29) における $Y_{k_t}(t)$ の主要項（**トロピカル部分**），すなわち，

$$\begin{aligned} &[Y_1(0)] = Y_1, \\ &[Y_2(1)] = Y_2, \\ &[Y_1(2)] = Y_1^{-1}, \\ &[Y_2(3)] = q^{-1}Y_1^{-1}Y_2^{-1} = (q^{-1}Y_1 Y_2)^{-1}, \\ &[Y_1(4)] = Y_2^{-1}, \end{aligned} \tag{30}$$

と定める．このとき，量子団代数の周期 (29) に付随する**量子ダイログ恒等式のトロピカル形**は

$$\Psi_q([Y_{k_0}(0)]^{\varepsilon_0})^{\varepsilon_0} \cdots \Psi_q([Y_{k_4}(4)]^{\varepsilon_4})^{\varepsilon_4} = 1 \tag{31}$$

で与えられる．より具体的には，(30) を代入して，

$$\begin{aligned} &\Psi_q(Y_1)\Psi_q(Y_2)\Psi_q(Y_1)^{-1} \\ &\quad \times \Psi_q(q^{-1}Y_1 Y_2)^{-1}\Psi_q(Y_2)^{-1} = 1 \end{aligned} \tag{32}$$

となる．$Y_2 = X, Y_1 = Y$ とおくと，これはペンタゴン恒等式 (24) そのものである．

また，量子団代数の周期 (29) に付随する**量子ダイログ恒等式の普遍形**は

$$\Psi_q(Y_{k_4}(4)^{\varepsilon_4})^{\varepsilon_4} \cdots \Psi_q(Y_{k_0}(0)^{\varepsilon_0})^{\varepsilon_0} = 1 \tag{33}$$

で与えられる．ここで，積の順序が (31) と逆であることに注意をする．より具体的には，(29) を代入して，

$$\begin{aligned} &\Psi_q(Y_2)^{-1}\Psi_q(q(1 + qY_2)^{-1}Y_2 Y_1)^{-1} \\ &\quad \times \Psi_q((1 + qY_2 + Y_1 Y_2)^{-1}Y_1)^{-1} \\ &\quad \times \Psi_q(Y_2(1 + qY_1))\Psi_q(Y_1) = 1 \end{aligned} \tag{34}$$

となる．ここで，$Y_2(q+qY_1)=X, Y_1=Y$ とおくと，$YX=q^2XY$ が成り立ち，Volkov のペンタゴン恒等式 (25) と一致することが確かめられる．

(31) が量子変数のトロピカル部分に対する恒等式であるのに比べて，(33) は量子変数そのものが現れる点において，(15) の「表式の上での」自然な q 類似になっている，というのが前節の最後で述べたコメントの意味である．

6. Faddeev の量子ダイログ関数

量子ダイログ関数には 2 つのバージョンがあることを冒頭で述べた．最後に，もう一つのバージョンについても簡単にふれておこう．

前節の関数 $\Psi_q(x)$ においては，パラメーター q に対して条件 $|q|<1$ が課されていた．これは，例えば $UV=q^2VU$ をみたす作用素 U, V をユニタリーにとれない，あるいは応用上重要な $|q|=1$ の場合を扱うことができない，などの問題をひき起こす．そこで，Faddeev は純虚数ではない任意の複素数 b をパラメーターとする以下のような関数を導入した[6]．

$$\Phi_b(z)=\exp\left(-\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-2zx\sqrt{-1}}}{\sinh(xb)\sinh(x/b)}\frac{dx}{x}\right). \tag{35}$$

ただし，積分路は $x=0$ における極を上から回るものとする．詳細は省略するが，この積分は $\operatorname{Im} z$ が小さいとき収束し，さらに複素平面上の有理型関数に解析接続されることがわかる．この有理型関数をあらためて $\Phi_b(z)$ と表し **Faddeev の量子ダイログ関数**（あるいは非コンパクト量子ダイログ関数，モジュラー量子ダイログ関数）という．

対称性 $\Phi_{b^{-1}}(z)=\Phi_{-b}(z)=\Phi_b(z)$ により，$\operatorname{Re} b>0,\quad \operatorname{Im} b\geq 0$ としてかまわない．

$$q=e^{\pi b^2\sqrt{-1}},\quad \overline{q}=e^{-\pi b^{-2}\sqrt{-1}} \tag{36}$$

とおく．$\overline{q}$ は q のいわゆるモジュラー変換である．このとき，$\operatorname{Im} b=0$（すなわち b は正の実数）ならば，$|q|=|\overline{q}|=1$，また，$\operatorname{Im} b>0$ ならば，$|q|, |\overline{q}|<1$ が成り立つ．

定理 5 $\operatorname{Re} b>0$, $\operatorname{Im} b>0$ をみたす b に対して，

$$\Phi_b(z)=\frac{\Psi_q(e^{2\pi bz})}{\Psi_{\overline{q}}(e^{2\pi b^{-1}z})}. \tag{37}$$

すなわち，$|q|=1$ における量子ダイログ関数を Ψ_q とその「モジュラーペア」$\Psi_{\overline{q}}$ の比の極限で定めるというのが Faddeev のアイデアである．$\Psi_q(x)$ と同様，$\Phi_b(z)$ に対しても，ペンタゴン恒等式の類似が成立して，さらに前節で述べたような量子団代数との関係が成り立つ．そして，半古典極限を「量子力学系から古典力学系への移行」という物理的視点から解釈する場合には，ユニタリティーの要請より量子ダイログ関数として $\Psi_q(x)$ より $\Phi_b(z)$ を考えるほうが自然となる．

以上まとめると，量子ダイログ恒等式の背後に量子団代数という構造があることを説明した．ところで，量子団代数と共形場理論の間にはさらなる未知の関係があることを示唆するいくつかの状況証拠がある．物語の新しい章は始まったばかりかもしれない．

参考文献

1) T. Nakanishi. Periodicities in cluster algebras and dilogarithm identities. In A. Skowroński and K. Yamagata, editors, *Representations of algebras and related topics*, EMS Series of Congress Reports, pages 407–444; arXiv:1006.0632 [math.QA]. European Mathematical Society, 2011.

2) R.M. Kashaev and T. Nakanishi. Classical and quantum dilogarithm identities. *SIGMA*, **7**:102, 29 pages, 2011. arXiv:1104.4630 [math.QA].

3) 長尾健太郎．3 次元 Calabi–Yau 圏と量子 dilog 関数．「数理科学」，1 月号：48–54, 2012.

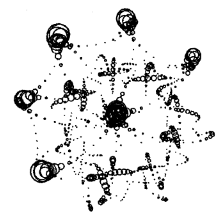
4) 中西知樹．dilogarithm．「数理科学」，9 月号：28–35, 1996.

5) L.D. Faddeev and R.M. Kashaev. Quantum dilogarithm. *Mod. Phys. Lett.*, **A9**:427–434; arXiv:hep-th/9310070, 94.

6) L.D. Faddeev. Discrete Hisenberg-Weyl group and modular group. *Lett. Math. Phys.*, **34**:249–254; arXiv:hep-th/9504111, 1995.

（なかにし・ともき，名古屋大学大学院多元数理科学研究科）

カタラン数から弦理論のミラー対称に迫る



村瀬　元彦

1. カタラン数

カタラン数（Catalan numbers）とは次の式で与えられる整数列である．

$$C_m = \frac{1}{m+1}\binom{2m}{m}, \quad m = 0, 1, 2, 3, \ldots. \quad (1.1)$$

これは不思議な性質を持っており，数学の思いもかけないような場面に現れる．Wikipedia を見てみると，何種類もの解釈が書かれている．また物理でも大栗氏の仕事の中に現れている[16]．ここでは上式で与えられた数としてではなく，m 組の括弧 ( ) を合法的に並べる方法の数という定義を採用しよう．そうすると $m = 0$ の場合は意味をなさないが，あとで出てくる式を簡単にするために $C_0 = 1$ と定める．$m = 1$ なら ( ) だけが正しい括弧なので $C_1 = 1$ であり，$m = 2$ ならば ( )( ) と (( )) の 2 通りの並べ方があるので $C_2 = 2$ となる．$m = 3$ となると少し注意が必要だが

$$()()(),\ ()(()),\ (())(),\ (()()),\ ((()))$$

の 5 通りの並べ方があり，従って $C_3 = 5$ が分かる．これより大きな m ではこのようなしらみつぶしの方法は役に立たない．こういう場合に役立つのがカタラン漸化式

$$C_m = \sum_{a+b=m-1} C_a C_b \quad (1.2)$$

で，例えば $C_4 = 2C_3 + C_2^2 = 14$ であることがすぐに分かる．

本稿の目的は直ちには意味をなすとは思えない次の問いに答えることである．

> **問い 1：**カタラン数のミラー対称は何か？

> **問い 2：**カタラン漸化式のミラー対称が果たす役割は何か？

ミラー対称の最も一般で完全な数学的定義はまだない．もしシンプレクティック「空間」が与えられているならば，その Gromov–Witten 不変量と同じだけの情報を持つ複素解析的対象物，という捉え方ができる（Kontsevich のホモロジー的ミラー対称[11]）．Calabi–Yau 空間に限るならば既に様々な数学の定理が得られている．Kontsevich のアイディアの素晴らしい点は，圏の間の同値関係を用いてミラー対称を捉えることにあり，それゆえ圏の下部構造としての「空間」は必ずしも必要ではなくなる．Calabi–Yau という条件は物理的要請から仮定されたものだが，純粋に数学的視点からは，Calabi–Yau 多様体とは全く性質の異なる（重み付き）射影空間のミラー対称を扱うことも可能となる．その場合，扱うミラー対称はもはや多様体ではなく Landau–Ginzburg モデルと呼ばれる複素解析函数になっている．

数学の理論には必ずよい例が伴う．その例を徹底的に調べることで，我々は数学の深みを垣間見ることが許され，また数学の鋭い喜びを味わうことができる．本稿で我々が与えるのは，ミラー対称の形式的定義ではなく，数学的に non-trivial でしかも最も簡単な例である．その例を通して，あとでカタラン漸化式の別証を与える．また，カタラン数のミラー対称から (1.1) が従うこともあとで注意する．

2. カタラン数の一般種数への拡張

漠然と，ミラー対称を Gromov–Witten 不変量と複素解析との対応だと捉えることにしよう．Gromov–

Witten 不変量は種数 g で n 個の点を持つリーマン面からシンプレクティック「空間」への正則写像の数のことだから，カタラン数のミラー対称を問うということは，カタラン数を Gromov–Witten 不変量のようなものと見なしていることになる．とすれば，種数 g と点の個数 n でラベル付けされたカタラン数の一般化を与えねばならない．カタラン数に多くの解釈があることに伴い，その一般化も豊富にある．ここで与えるのはそういった一般化ではなく，もっと単純なカタラン数の多種数への拡張である．

そこでまず，向き付けられた球面の上に頂点の数が 1 のグラフを描こう．そのグラフを球面から取り除いたときに補集合が開円盤の有限個の和集合になっているという条件をおく．そういうグラフを**セル状グラフ**ということにしよう．これは，グラフの頂点と辺と，補集合の開円盤とで曲面のセル分割が与えられるからである．さて，今の例では頂点が一つしかないのだから，そこから出た辺は同じ所に戻らねばならない．従って頂点の価数 μ は偶数 $\mu = 2m$ になる．辺をその中点で切ったものを化学の原子価の例にならいボンドと呼ぶ．頂点の価数がその頂点に付着したボンドの数を与える．グラフをその頂点の周りで回転する自由度をなくすために，$2m$ 個のボンドの一つに（外向きの）矢印を付けておく．

$$C_{0,1}(\mu) = \begin{array}{l}\text{種数 } 0 \text{ で } \mu \text{ 価の頂点一つだけを持つ}\\ \text{矢印付きセル状グラフの数}\end{array}$$

と定義しよう．図 1 に一つの例を与える．

球面は向き付けられているから，頂点の周りでボンドに巡回的順序が与えられている．まず矢印付きのボンドから始めて，反時計回りに $2m$ 個のボンドを辿ろう．一番目のボンドに対応して括弧を一つ開ける．次のボンドは新しい辺なので，また括弧を一つ開ける．三番目のボンドもまた新しく，また括弧を開ける．その次のボンドは三番目のボンドと同じ辺なので，三番目の括弧を閉じる．こうして最後まで達すると，上のグラフに対応して括弧式 ((( ))) が完成する．従って，

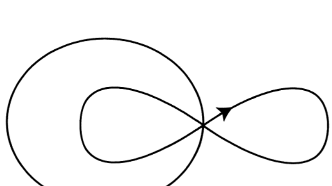


図 1　種数 0 で 1 頂点のみを持つ矢印付きセル状グラフ．

$C_{0,1}(2m) = C_m$ となり，カタラン数が得られた．

ここまでくれば一般化は易しい．$D_{g,n}(\mu_1, \dots, \mu_n)$ で種数 g のリーマン面上に描かれた価数が $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ であるような頂点 $p_1, p_2, \dots, p_n$ を持つ連結セル状グラフの数を表そう．ただしここではグラフに自己同型がある場合には自己同型群の位数の逆数を重みとしてグラフの数を勘定することにする．2 つのグラフが曲面の同相写像で移り合うならそれは同一視され一つのグラフと勘定される $(2 \div 2 = 1)$ のだから，もしグラフが r 個の自己同型を持つなら，そのグラフの数は $\frac{1}{r}$ と数えるのが理にかなっている．従って $D_{g,n}(\mu_1, \dots, \mu_n)$ は有理数値をとる．D はデッサンに由来する．ところで，各頂点には番号 $1, 2, \dots, n$ を付けておいたので，グラフの自己同型は各頂点の周りで μ_i 個のボンドを巡回置換で置き換える操作から得られるものに限るので，

$$C_{g,n}(\mu_1, \dots, \mu_n) = \mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n \, D_{g,n}(\mu_1, \dots, \mu_n)$$

は整数になる．これを**タイプ (g, n) の一般カタラン数**と呼ぼう．

3. 一般カタラン数の間の関係式

一般カタラン数の間には次の式が成立する．

$$\begin{aligned} &C_{g,n}(\mu_1, \dots, \mu_n) \\ &= \sum_{j=2}^{n} \mu_j C_{g,n-1}\bigl(\mu_1 + \mu_j - 2, \mu_{[n]\setminus\{1,j\}}\bigr) \\ &\quad + \sum_{\alpha+\beta=\mu_1-2} \Biggl[C_{g-1,n+1}\bigl(\alpha, \beta, \mu_{[n]\setminus\{1\}}\bigr) \\ &\quad + \sum_{\substack{g_1+g_2=g \\ I \sqcup J = \{2,\dots,n\}}} C_{g_1,|I|+1}(\alpha, \mu_I) C_{g_2,|J|+1}(\beta, \mu_J) \Biggr]. \end{aligned} \tag{3.1}$$

ここで部分集合 $I \subset [n] = \{1, 2, \dots, n\}$ に対して $\mu_I = (\mu_i)_{i \in I}$ と定める．最後の和は種数 g と添字の集合 $\{2, 3, \dots, n\}$ のすべての分割をわたる．

この証明はデッサンを数えるほうが簡単にできる．デッサンの個数は次の同値な式を満たす．

$$\begin{aligned} &\mu_1 D_{g,n}(\mu_1, \dots, \mu_n) \\ &= \sum_{j=2}^{n} (\mu_1 + \mu_j - 2) D_{g,n-1}\bigl(\mu_1 + \mu_j - 2, \mu_{[n]\setminus\{1,j\}}\bigr) \end{aligned}$$

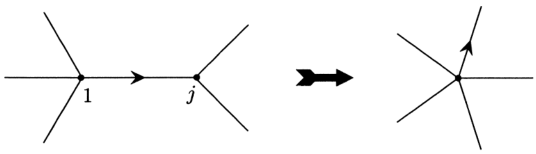


図 2　辺を縮めて長さを 0 にし p_1 と p_j とを同じ頂点にしてしまう操作.

$$
+ \sum_{\alpha+\beta=\mu_1-2} \alpha\beta \Biggl[D_{g-1,n+1}(\alpha,\beta,\mu_{[n]\setminus\{1\}})
+ \sum_{\substack{g_1+g_2=g \\ I\sqcup J=\{2,\ldots,n\}}} D_{g_1,|I|+1}(\alpha,\mu_I) D_{g_2,|J|+1}(\beta,\mu_J) \Biggr]. \tag{3.2}
$$

証明を与えよう．まず左辺は頂点 p_1 で μ_1 個のボンドの一つに矢印を付けたものを数えている．その矢印のついた辺が頂点 p_1 と p_j とを繋いでいるとしよう．グラフを簡単なものに変形して数える手段として，その辺を縮めて長さを 0 にし p_1 と p_j とを同じ頂点にしてしまう操作を考える．そうすると価数が $\mu_1+\mu_j-2$ の新しい頂点ができる．巡回的順序に従って元の矢印の次のボンドに新しい矢印を付け，上の操作がどこで行われたかが分かるようにしておく．式 (3.2) 右辺の第 1 項はこうして得られたデッサンを数えている (図 2 参照).

次に，矢印のついた辺が p_1 から出て p_1 に戻るループになっている場合を考えよう．ループが他のボンドを α 個と β 個の 2 つの組に分けているとする．もちろん $\alpha=0$ でもかまわない．さてここでもループの長さを 0 にする極限操作をするのだが，ループが曲面上に描かれていることを考慮すれば，長さを 0 にするということはピンチングの操作をすることに当たることが分かる．ただ，ピンチングをして特異点を持った曲面を作るのではなく，特異点を解消して 2 つに分けてしまうのである．従って，操作は図 3 のようにループを取り除く作業となる．この操作のあとで，種数 g の曲面はハンドルが切れて種数が一つ下がるか，あるいは 2 つの曲面に分かれてしまう．式 (3.2) 右辺の第 2 項と第 3 項はこうして得られたデッサンを数えている (図 3 参照).

さて，もう一度一般カタラン数の式 (3.1) に戻り，ラベルが $(g,n)=(0,1)$ の場合を考えてみよう．右辺の第 1 項と第 2 項には対応するものはなく，第 3 項も $g_1=g_2=0$ と $I=J=\emptyset$ の場合だけが残る．

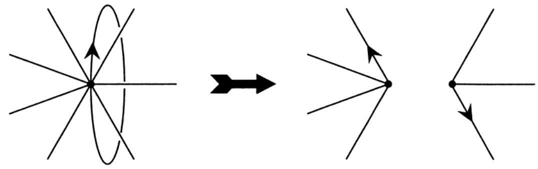


図 3　ループを取り除く操作．ボンドの 2 つの組に応じて頂点を 2 つに分け，それぞれにもとのループの位置を示す矢印を付ける.

$C_{0,1}(2m)=C_m$ に注意すれば式は (1.2) に帰着し，我々はその新しい証明を得た.

4. カタラン数のミラー対称

さていよいよカタラン数のミラー対称は何かとの問いに答えるときが来た．次の形の Landau–Ginzburg モデル

$$
x = z + \frac{1}{z} \tag{4.1}
$$

がミラー対称を与えるというのが我々の答えである．ここで，カタラン数の生成函数を児玉[10]に従って

$$
z(x) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m \frac{1}{x^{2m+1}}
$$

で与えよう．カタラン漸化式 (1.2) を用いると，$x=\infty$ で $z=0$ となるような生成函数の逆関数がたちどころに求められ，それが (4.1) であることが分かる．同時に，(4.1) を z の 2 次式とみて実際に解き，

$$
z(x) = \frac{x}{2}\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{2}{x}\right)^2}\right)
$$

のルートを二項係数を使って展開すれば，カタラン数の具体的表示 (1.1) が得られる.

さて，z の函数としての x は $z=\pm 1$ で分岐点を持つので，曲線 $x=z+\frac{1}{z}$ のパラメタとして

$$
t = \frac{z+1}{z-1} \tag{4.2}
$$

を使うことにしよう．そうして，デッサンの数の**ラプラス変換**を

$$
\begin{aligned}
&F_{g,n}(t_1,\ldots,t_n) \\
&= \sum_{\mu\in\mathbb{Z}_+^n} D_{g,n}(\mu_1,\ldots,\mu_n) e^{-(\mu_1 w_1+\cdots+\mu_n w_n)}
\end{aligned} \tag{4.3}
$$

で定義する．ここで，$e^w = x = z+\frac{1}{z} = \frac{t+1}{t-1}+\frac{t-1}{t+1}$ を使って w の函数を t の函数と見なす．このとき，次

の定理が成り立つ.

定理 1[4,5,14]. デッサンの数 $D_{g,n}(\mu_1,\ldots,\mu_n)$ が満たす関係式 (3.2) のラプラス変換は $F_{g,n}(t_1,\ldots,t_n)$ の $2g-2+n$ に関する有効な微分漸化式を与え, それを用いて $F_{g,n}(t_1,\ldots,t_n)$ を次々に計算することができる. 特に, 漸化式による数学的帰納法により次の諸性質が従う.

(1) $2g-2+n>0$ のとき $F_{g,n}(t_1,\ldots,t_n)$ は $6g-6+3n$ 次のローラン多項式で, 相互律 $F_{g,n}(t_1,\ldots,t_n)=F_{g,n}(\frac{1}{t_1},\ldots,\frac{1}{t_n})$ を満たす.

(2) $(-1)^nF_{g,n}(1,1,\ldots,1)$ はなめらかな n 点つき曲線のモジュライ空間のオイラー標数 $\chi(\mathcal{M}_{g,n})$ に等しい.

(3) 対角値 $F_{g,n}(t,\ldots,t)$ は $\frac{(t+1)^2}{4t}$ の多項式で, $\mathcal{M}_{g,n}$ の仮想ポアンカレ多項式を与える.

(4) $F_{g,n}(t_1,\ldots,t_n)$ を最高次の項に制限したものは $6g-6+3n$ 次の同次多項式となり,

$$\frac{(-1)^n}{2^{2g-2+n}}\sum_{\substack{d_1+\cdots+d_n\\=3g-3+n}}\langle\tau_{d_1}\cdots\tau_{d_n}\rangle_{g,n}\times\prod_{i=1}^{n}(2d_i-1)!!\left(\frac{t_i}{2}\right)^{2d_i+1}$$

で与えられる. ここで $\langle\tau_{d_1}\cdots\tau_{d_n}\rangle_{g,n}$ は Witten–Kontsevich 理論に出てくるコンパクトモジュライ空間 $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ 上の交点数. また, (3.2) のラプラス変換をこの最高次項に制限したものは Witten–Kontsevich 理論の Virasoro 関係式に一致する.

(5) (g,n) すべてにわたる対角値の生成函数

$$\exp\left(\sum_{g=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\hbar^{2g-2+n}F_{g,n}(t,t,\ldots,t)\right)$$

は KP 方程式のある τ 函数から作られた Baker–Akhiezer 函数に一致する.

カタラン数の多種数拡張はそのラプラス変換を通して驚くような結果へと我々を導いてくれた. それは非特異曲線のモジュライ空間 $\mathcal{M}_{g,n}$ のトポロジーを知っているだけでなく, その Deligne–Mumford コンパクト化 $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ の交点数理論まで知っているのである. さらにそれは Witten–Kontsevich 理論を通して KdV 方程式と関係するのみならず, KP 理論にも直接関係している.

5. Eynard–Orantin 理論とリモデル予想

ここで改めてミラー対称を深く吟味する必要がある. 物理学的にも数学的にも良く理解され, また広く受け入れられているのは複素 3 次元 Calabi–Yau 多様体の間のミラー対応であろう. ごく最近, 複素 3 次元トーリック Calabi–Yau 多様体の場合に素晴らしい発展があった.

Gromov–Witten 不変量はシンプレクティック構造の不変量だが, 正則写像のモジュライの構成, そのコンパクト化, さらにリーマン–ロッホの定理で予測される次元の仮想基本クラスの存在等の問題をクリアーするには, 代数幾何の手法に訴えるのが一番簡単なので, 不変量の具体的計算が実際できるのは特別な代数多様体に限られていた. しかしこういった Gromov–Witten 不変量の計算は標的空間内のラグランジアン部分空間には目もくれないので, 本物のシンプレクティック構造を相手にしていたわけではない. 境界を持ったリーマン面を, その境界が与えられたラグランジアン部分空間に張り付くように正則写像で標的空間にはめ込み, この写像のモジュライから**開 Gromov–Witten 不変量**を出そうとすると, すぐに代数幾何の守備範囲を超えてしまう. 標的が複素射影代数多様体でも, ラグランジアンは同じ次元の実多様体だから, もともと代数的な対象ではないのだ. 代数多様体の場合に開 Gromov–Witten 不変量を相対 Gromov–Witten 不変量と捉えて代数的に定義することは可能だが, そういったものの計算は手に負えない作業になってしまう.

2006–2007 年にジュネーブの Mariño は 3 次元トーリック Calabi–Yau 多様体の開 Gromov–Witten 不変量は, ミラー対称で移った先ではミラー曲線と呼ばれる代数曲線上の有理型微分形式を用いて具体的に計算できるというアイディアを得た. ちょうどその頃パリ郊外の Eynard と彼の学生の Orantin は行列積分の満たすループ方程式を一般化して, 今では **Eynard–Orantin 漸化式**と呼ばれる開リーマン面上の有理型微分形式の満たす漸化式を発見した[7]. 発見当初この漸化式が何を計算しているのかは誰にも (論文を書いた本人たちにすら) 分からなかった. Mariño は Bouchard, Klemm, Pasquetti との共同研究を通して 3 次元トーリック Calabi–Yau 多様体の開 Gromov–Witten 不変量の生成函数が, ミラー対称で移った先で Eynard–Orantin 漸化式を満たすことを予想した[2]. 彼らは, 3 次元トーリック Calabi–Yau 多様体のミラー対称その

ものの上の解析的連接層の導来圏を考えるのではなく，ミラー曲線上に定義された，Eynard–Orantin 漸化式によって定まる有理型微分形式の 2 重無限列が新たに B–モデルを決定しているとの観点に立って，この新しい理論を B–モデルの「リモデル」と呼んだ．3 次元トーリック Calabi–Yau 多様体の開 Gromov–Witten 不変量を決定する問題を A–モデルとすれば，そのミラー対称がリモデルされた B–モデルになっている，というのが彼らの予想で，**リモデル予想**と呼ばれている．

リモデル予想の定式化はその幾何学的部分が極めて複雑なので，Bouchard と Mariño は $\mathbb{C}^3$ の場合のリモデル予想の極限として，一重フルヴィッツ数の生成函数が Eynard–Orantin 漸化式を満たすという予想が従うことを見出した[3]．この予想（Bouchard–Mariño 予想）は純粋に代数幾何の言葉だけで記述できるものなので，多くの数学者の興味を惹いた．そして，この予想は定式化されて 2 年後に解決された[6, 15]．その基本となったアイディアは一重フルヴィッツ数が満たす cut-and-join 方程式と呼ばれる関係式のラプラス変換がまさに Eynard–Orantin 漸化式そのものであるという筆者の発見であった[13]．

北京の周堅は文献 6) の結果を用いて $\mathbb{C}^3$ の場合のリモデル予想を解いた．その後一般の場合のリモデル予想への成果はなかなか上がらなかったが，やっと今年になって，Eynard と Orantin[8] によって非特異 3 次元複素代数的トーリック Calabi–Yau 多様体の場合に解決された．彼らはトロピカル幾何を用いて A–モデルと B–モデルとを比べ，それらが一致することを示したのである．

Eynard–Orantin 理論の出発点は開リーマン面 Σ とその複素ラグランジアンはめ込み $i : \Sigma \longrightarrow T^*\mathbb{C}$ である．ラグランジアン特異点を焦点集合から眺めてその周りで複素ラグランジアン Σ 上の有理型微分形式の留数をとるという形で Eynard–Orantin 漸化式が定式化される．その最も簡単で，トリヴィアルでない例がカタラン数のミラー対称 (4.1) なのだ（図 4 参照）．

このとき，タイプ (g, n) の一般カタラン数のラプラス変換の満たす積分（留数）漸化式がまさに Eynard–Orantin 漸化式なのである．

Mariño によるリモデルのアイディアを数学的に簡単化したものが A–モデルのラプラス変換としての B–モデルという筆者のアイディアで，リモデル予想を解決した文献 8) の結果の基本的な構想の一つになっている．ホモロジー的ミラー対称によって空間から解放

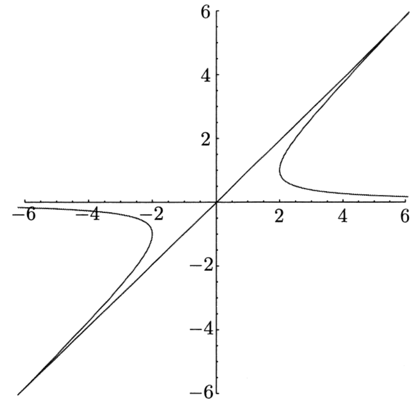


図 4　ラグランジアンはめ込み．

されたがゆえに，我々は整数変数の函数と複素変数の解析函数との間のラプラス変換としてミラー対称を解釈することができるようになった．

もちろん，適用範囲は決まっている．一般にコンパクトな Calabi–Yau 多様体の場合のミラー対称は複素ラグランジアンはめ込み $i : \Sigma \longrightarrow T^*\mathbb{C}$ では捉えられない．Eynard–Orantin 理論の高次元化を探すというのもいずれ問題となろうが，今はっきり言えることは，理論がうまくいっているのは Σ がリーマン面だからなのである．KP 理論との関連を述べたが，どちらもリーマン面に由来した理論で，安易な高次元化が成功するとは限らない．

6. 序幕が終わり，第 1 幕が始まった

2011 年の夏に筆者は Mariño に「なんでカタラン数のラプラス変換なんかを考えたのか」と聞かれたことがある．数学者は何でも考えてみるものなのだが，どうして彼が不思議がったのか分からなかったので，「どうして？」と逆問すると，「あなたの定理は物理学者の誰も予想していなかったから」と言うのであった．Gukov も筆者の定理を初めて見たとき，「あれっ，と思った」と同じことを言った．

これが，最も簡単で non-trivial な例，ということの真髄である．では筆者の本当の思いは何か．それは，

$$C_m = \dim \mathrm{End}_{U_q(sl(2))}\big(T^m(\mathbb{C}^2)\big)$$

に潜んでいる．つまりカタラン数は最も簡単な量子群の表現論に出てくる量であり，それも次元という最も単純な量を問題にしている，ということにある．

とすれば，次の幕の主役は Jones 多項式，HOMFLY

多項式，Khovanov ホモロジーと行った組紐不変量であろう．まさに，上の定理で述べた Baker–Akhiezer 函数が，さらに深い定式化のあとで，すべての「色」にわたる Jones 多項式の解析的表示を与えているのだろうと今考えられている．そこでは，既約表現の次元としての「色」も複素解析パラメタの中に組み込まれている．

筆者は 2008 年春に Eynard–Orantin 理論の勉強を始めた[12)]．4 年あまりが経過した今，これまでのめまぐるしいほどの進展にまさに心を奪われている．非特異の場合のリモデル予想が解決され，Eynard–Orantin 理論が役立つ理論であることが証明された．3 次元双曲体積予想や AJ 予想を視野に入れた Eynard–Orantin 理論の精緻化が今進められている[1,9)]．こんなにおもしろいことになるだろうとは 2008 年当時思いもしなかった．

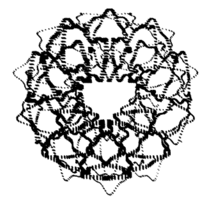
序幕が終わり，今第 1 幕が始まった．いよいよ主役の登場である！

参考文献

1) G. Borot and B. Eynard, All-order asymptotics of hyperbolic knot invariants from non-perturbative topological recursion of A-polynomials, arXiv: 1205–2261 (2012).
2) V. Bouchard, A. Klemm, M. Mariño, and S. Pasquetti, Remodeling the B-model, *Commun. Math. Phys.* **287**, 117–178 (2008).
3) V. Bouchard and M. Mariño, Hurwitz numbers, matrix models and enumerative geometry, *Proc. Symposia Pure Math.* **78**, 263–283 (2008).
4) K. Chapman, M. Mulase, and B. Safnuk, Topological recursion and the Kontsevich constants for the volume of the moduli of curves, *Communications in Number Theory and Physics* **5**, 643–698 (2011).
5) O. Dumitrescu, M. Mulase, B. Safnuk and A. Sorkin: The spectral curve of the Eynard–Orantin recursion via the Laplace transform, arXiv:1202.1159 math.AG (2012).
6) B. Eynard, M. Mulase and B. Safnuk, The Laplace transform of the cut-and-join equation and the Bouchard-Mariño conjecture on Hurwitz numbers, *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences* **47**, 629–670 (2011).
7) B. Eynard and N. Orantin, Invariants of algebraic curves and topological expansion, *Communications in Number Theory and Physics* **1**, 347–452 (2007).
8) B. Eynard and N. Orantin, Computation of open Gromov-Witten invariants for toric Calabi-Yau 3-folds by topological recursion, a proof of the BKMP conjecture, arXiv:1205.1103 (2012).
9) H. Fuji, S. Gukov, and P. Sułkowski, Volume conjecture: Refined and categorical, arXiv:1203.2182 (2012).
10) Y. Kodama, Combinatorics of the dispersionless Toda hierarchy, Lecture delivered at the International Workshop on Nonlinear and Modern Mathematical Physics, Beijing Xiedao Group, Beijing, China, July 15–21, 2009.
11) M. Kontsevich, Homological algebra of mirror symmetry, arXiv:alg-geom/9411018 (1994).
12) 村瀬元彦，「Witten–Kontsevich 理論の思いがけない新展開」，数理科学 2008 年 9 月号．
13) 村瀬元彦，「子供の目」，『この数学者に出会えてよかった』数学書房，所収 (2011).
14) M. Mulase and M. Penkava, Topological recursion for the Poincaré polynomial of the combinatorial moduli space of curves, *Advances in Mathematics* **230**, 1322–1339 (2012).
15) M. Mulase and N. Zhang, Polynomial recursion formula for linear Hodge integrals, *Communications in Number Theory and Physics* **4**, (2010).
16) H. Ooguri, Topological Strings and Black Holes, Talk at UC Berkeley, May 2005.

（むらせ・もとひこ，カリフォルニア大学デイヴィス校）

超弦理論のさし示す新しい幾何学



江口 徹

今回編集部から「超弦理論のさし示す新しい幾何学」というタイトルで記事を書くように依頼されましたが，まだ定説が定まらない難しいテーマで何を書いたら良いのか大いに困っているところです．

超弦理論の研究が進むと何か今までに全く知られていなかったような新しい幾何学の描像が現れるのではないかということが以前から言われてきました．超弦理論の幾何学に関連した新しい概念としては，ここ 20–30 年ほどの発展の間に，T-デュアリティー，ミラー対称性，非可換時空などのアイディアが現れました．これらはいずれも重要な進展で，そのあらましを以下でざっと紹介しようと思います．しかしこれらの発展はそれぞれ弦理論の持つ特定の側面を捉える所に留まっていて，超弦理論の幾何学全体の核心を突いているとまではいえないと思います．超弦理論の新しい幾何学は，遥かに霞んでいてまだ我々には見えない状態にあるといって良いでしょう．

超弦理論の紐は $10^{-33}\,\mathrm{cm}$ 程度の極微の長さのものですが，紐の長さくらいの微小な時空にまで行くと，時間，空間がもう連続的な値をとることをやめてつぶつぶの点からなるのではないかといった予想があります．

今，半径 R の円周上を弦が運動していると，弦は全体として並進の運動エネルギー $(\frac{n}{2\pi R})^2$（n は任意の整数）を持ちますが，この他に円周に（任意の回数 m 回）巻き付くことからくるエネルギー $(\frac{2\pi Rm}{l_s^2})^2$（$\frac{1}{l_s^2}$ は弦の持つエネルギー密度）も持っています．このためこの 2 種類のエネルギーを入れ替える対称性が存在します

$$R \Longleftrightarrow \frac{l_s^2}{R}. \tag{1}$$

これが T-デュアリティー（T-双対性）と呼ばれます．T-デュアリティーを深刻にとると，サイズ R を持つ円周は，弦から見るとサイズ $\frac{l_s^2}{R}$ を持つ円周と全く同等に見えることになります．(1) の下で R の最小値を考えると

$$R = \frac{l_s^2}{R} \Longrightarrow R = l_s, \tag{2}$$

すなわち $R = l_s(\sim 10^{-33}\,\mathrm{cm})$ が許される最小の値となり，時空には弦の長さよりも短い領域は存在しないことになります．上に述べたつぶつぶの時空の描像と似ています．

この議論は確かに弦理論の側面の一部を捉えていると思われますが，弦が本当に l_s 以下の距離の空間を探ることができないかどうかは非常に微妙な問題です．弦にはいくらでも高いエネルギーの励起状態が存在し，質量の大きな素粒子に対応しますから，弦がこういう運動のモードを用いればいくらでも近距離の空間を探れるようにも思えます．

現代数学に大きなインパクトを与えたミラー対称性は，T-デュアリティーをカラビ–ヤウ多様体というもっと複雑な多様体に応用したものと考えられます．

非可換時空は弦理論でいわゆる B 場が存在するときに起きる現象ですが，量子力学で知られる座標と運動量の間の非可換性を，座標どうしの非可換性に焼き直したものになっています．今，10 次元を運動する弦の座標を $X^i(\tau,\sigma), i = 1,\cdots,10,$

10 次元時空の計量を $G_{ij}(X)$，B 場を $B_{ij}(X)$ とおくと，弦の運動エネルギー項は

$$\int d\tau d\sigma \left[G_{ij}(X)\partial_\mu X^i \partial_\mu X^j + \epsilon_{\mu\nu} B_{ij}(X)\partial_\mu X^i \partial_\nu X^j \right]$$

となります ($\epsilon_{\tau\sigma} = -\epsilon_{\sigma\tau} = 1, \epsilon_{\tau\tau} = \epsilon_{\sigma\sigma} = 0$)．これを $\partial_\tau X^i$ で変分すると

$$G_{ij}\partial_\tau X^j + B_{ij}\partial_\sigma X^j \tag{3}$$

となり，有効運動量 (3) の中に運動量に相当する $\partial_\tau X^j$ と座標に相当する $\partial_\sigma X^j$ が混ざってきます．このため見かけ上の空間の非可換性が生じます．B 場が存在する系は 2 次元電子系に z 方向に磁場がかかった状況と本質的に同等で，磁場中では電子はサイクロトロン運動をしますが，サイクロトロン運動の重心座標が非可換になっていることは量子力学でよく知られています．

B 場からくる弦理論の非可換性はやや弱く，紫外や赤外における理論の振幅の振舞いに変更を与えはしますが，そのままでは弦理論の幾何学に根底から影響を与えるとは考えにくいと思います．非可換幾何学自体は多くの数学者が 21 世紀の数学としてその建設を試みてきたテーマですが，筆者の知る限り，なかなか簡単で有効な例が得られていないように思います．弦理論から離れても，非可換幾何学を展開することは重要な研究課題となっています．

最後に，楕円種数の話に少し触れておきましょう．弦理論には無数の素粒子が含まれます．例えば，基底状態がフェルミオンでフェルミオンの励起状態を無数に含む理論を考えます．こうした弦が与えられたゲージ場 (あるいは重力場) の中で運動したとすると，いわゆるカイラル・アノマリーが生じます．カイラル・アノマリーの値はフェルミオンの表現に依存するので，弦理論に現れる種々の表現のフェルミオンすべてについて，アノマリーを足し上げると興味ある量を得ることができます．これが楕円種数で，弦が運動する空間の位相不変量になることが知られています．

楕円種数はモジュラー変換と呼ばれる特別な変換性を持ち，種々の数論的な量と関係しています．私事にわたって恐縮ですが，2 年ほど前に大栗さん，立川さんと一緒に K3 曲面上の超弦理論を調べて楕円種数に特別な対称性（マシュー群 M_{24}）が存在することに気がつきました．K3 曲面は弦理論にしばしば登場する基本的な空間ですが，複素解析学でも最も重要な空間の一つです．特定の複素構造を持つ K3 曲面がマシュー群 M_{23} の部分群の対称性を持つことは古典的な幾何学で知られていましたが，任意の K3 曲面が M_{24} の対称性を持つ楕円種数を持つことは古典的な幾何学をこえています．楕円種数は，弦理論に存在するすべての BPS 状態を足し上げて，その結果を数論的な変換性で統御しています．このような量が古典的な幾何学を弦理論的な幾何学に持ち上げるときに役に立つのは自然なことだと思われます．

数論と弦理論が深く関係するのではないかということは以前から言われていますが，いまだに決定的な状況証拠はありません．p-adic string などが議論されたことがありますが，距離の定義が局所的場の理論に適合しないのでうまくいかないという結論でした．現在のところ，ブラックホールの量子状態の数え上げに関係した楕円種数やヤコビ形式，またそのラデマッハ展開などが最も数論に関連した結果と言えるでしょう．最近は，超共形代数の表現とモックテータ関数の関係等も調べられています．弦理論の幾何学が将来数論的な要素を取り込んだものになる可能性は高いのではないかと思います．

以上に述べた，T-デュアリティー，非可換幾何，数論的幾何などを統一するような大きなアイディアがこれから弦理論に現れてくるでしょうか？ 大いに期待がもたれますが，その輪郭が見えてくるまでには，まだかなりの時間がかかりそうです．

（えぐち・とおる，立教大学理学部）

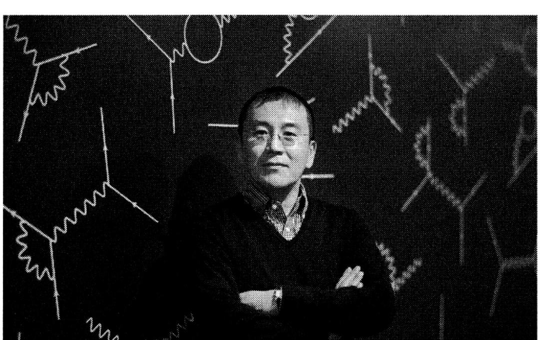
弦理論と数学の関係

大栗　博司（質問：編集部）

1. 弦理論と数学

――特集中では弦理論に登場する様々な数学が取り上げられていますが，両者の結びつきはいつ頃から顕著になり，現在に至っているのでしょうか．また，それらの数学には何か共通の特徴のようなものはあるのでしょうか．

ニュートンが，力学の体系の建設と微積分の発見を同時に行ったことからもわかるように，歴史的に数学と物理学の結びつきは強いものです．しかし，素粒子論と数学の関係が途絶えたように思えた時期もありました．たとえば，くりこみ理論の確立に貢献したフリーマン・ダイソンは，今から40年前の1972年に「過去数世紀にわたってすばらしい成果をもたらしてきた数学と物理学の婚姻関係は，最近になって離婚に終わってしまった」と書いています．



大栗博司氏（Photo by Takashige Ikawa）.

ダイソンがこのように感じた背景には，ブルバキに象徴される数学の厳密主義が数学と他の分野との交流を難しくしたこと，また素粒子論の基本言語である場の量子論についての物理学者の理解が未熟で数学の手法を活用することができなかったことがあるのではないかと思います．

しかしまさしくこの時期に，現在の数学と物理学の交流の布石が打たれていました．新設されたばかりのニューヨーク州立大学ストーニーブルック校の数学教室を立ち上げるために主任教授として招かれたジェームズ・サイモンズが，プリンストンの高等研究所から引き抜かれてきた楊振寧（ヤン・ジェンニーン）と交流するようになったのです．サイモンズは，ヤンらが1954年に提唱したヤン–ミルズ理論を数学的に理解しようとしたのですが，すぐには物理学の言葉がわかりませんでした．しかし，数年の間ヤンと粘り強く会話を続けた末に，この理論の幾何学的意義を解明するに至ったのです．これが1970年代初めのことでした．

これが端緒になり，モノポール解やインスタントン解の構成に数学者が活躍するようになりました．

それ以前の物理数学の方法といえば，微分方程式や複素関数論，また1960年代になると群論など，解析や代数でした．今でも，学部学生向けの物理

数学といえば，解析や代数を中心とした教程となります．しかし，素粒子論や弦理論では，1970年代以降，幾何学的方法の台頭が著しくなりました．江口徹，ピーター・ギルケイ，アンドリュー・ハンソンの名著 “Gravitation, Gauge Theories and Differential Geometry” が出版されたのが1980年であるというのも象徴的です．

2. 弦理論の数学の未来

——特集中でも様々な分野の数学が取り上げられていますが，今回取り上げていない分野が端緒となる新たな“弦理論的な数学”は出てくるでしょうか．

弦理論には「シェンカーの法則」というものがあって，こんな厄介な分野のことは勉強したくないと思っていると，その分野が必ず重要になると言われています．これは「マーフィーの法則」を受けた冗談ですが，数学の思いがけない分野が重要になることはよくあります．あらかじめどのような数学が将来重要になるかを予想することはできません．もちろん，もし私に見当がついていても，企業秘密なので，ここで皆さんにご披露するわけはありませんが（笑）．

場の量子論や弦理論の研究によって，これまで直接関係がないと思われてきた数学の分野の間に新しい関係が見つかることがあります．

私の研究に関連することとしては，2次元の共形場の理論の研究からリーマン面の幾何学と無限次元リー代数の表現論の間に関係が見つかったこと，多様体の複素構造とシンプレクティック構造を関係付けるミラー対称性，トポロジカルな弦理論と3次元の組みひもの不変量や4次元のゲージ理論のインスタントン解析との関係などがあげられます．

場の量子論や弦理論では先に引用したダイソンの文章が書かれたころには想像できなかったほど幅広い分野の数学が使われています．たとえば整数論で開発された方法は，以前は物理学とは疎遠であると思われていましたが，弦理論では保形形式の理論が盛んに使われていますし，最近では「モチーフ」の概念が超対称性を持つ場の量子論のBPS状態の理解や散乱振幅の計算に重要であることが明らかになりつつあります．このように，さまざまな分野の数学が場の量子論や弦理論を通じで出会うことが，これらの分野の間に思いがけない関係が見つかる理由でもあるのです．

3. 学ぶためには

——ところで，数学といえば様々な定義や定理などが並び，一から勉強するのは大変な面もあります．物理出身の人が弦理論に登場するような数学を学ぶためにポイントとなってくることはあるでしょうか．

物理学者は数学のユーザーですから，数学の勉強の仕方も，数学者と物理学者とでは異なります．

よく大学院生に言うことですが，素粒子論や弦理論の勉強をする前に必要な数学を身につけておこうとして数学の勉強から始めると，いつまでたっても研究はできません．先ほど言いましたように，そもそもどのような分野の数学が将来重要になるかもわからないので，必要な数学を全部勉強しておこうとするときりがないのです．

もちろん，学部の物理数学で勉強するような微分方程式や複素関数論，群論，また微分幾何の初歩程度はきちんと勉強しておく必要があります．これは数理物理の基礎的教養と言えるでしょう．しかし，それ以上は必要になってから勉強するのがよいと思います．必要になってから勉強するほうが，動機付けにもなりますし，また数学のどの側面に集中して勉強すべきかもわかるからです．

むしろ，物理学の研究をしながら，どのような数学が必要になるかを見極め，その数学の技術を身につける柔軟な力が重要です．

そもそも，素粒子論や弦理論の新しい発展が既

存の数学で記述できるとは限りません．研究をしながら新しい数学を作ることが必要になることもあります．

4. 影響を受けたこと

――先生が研究者になるに当たって影響を受けたことをお聞かせ下さい．

「朝起きた時に，きょうも一日数学をやるぞと思っているようでは，とてもものにならない．数学を考えながら，いつのまにか眠り，朝，目が覚めたときは既に数学の世界に入っていなければならない」という佐藤幹夫さんの言葉です．

5. メッセージ

――今後，研究者を目指す方や学生さんへのメッセージをお願いします．

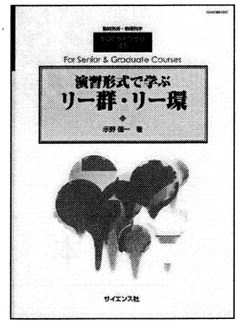
素粒子論は，自然界の最も基本的な法則を探る学問です．科学者は，この数百年の間に，原子 ⇒ 原子核 ⇒ 陽子，中性子，中間子 ⇒ クォークと，物質のより基本的な単位を求めることで，自然のより深い構造を明らかにしてきました．

しかし，このような歩みは重力と量子力学を統合する理論で完結すると考えられています．そして，そのような理論の最も有望な候補が超弦理論なのです．超弦理論はまだ完成途上で様々な問題もありますが，その発展の過程で数学の諸分野に刺激を与えてきました．また，超弦理論から生まれたホログラフィー原理などの手法は，理論物理学の広い分野の問題にも応用されています．物理学の根源的な問題の興味のある人には，是非チャレンジしてほしい分野です．

（おおぐり・ひろし，カリフォルニア工科大学，
東京大学国際高等研究所カブリ数物連携宇宙研究機構）

書評

演習形式で学ぶ リー群・リー環



示野信一著，B5 判，184 頁，本体 2381 円，サイエンス社

示野信一氏は，等質空間上の調和解析や，偏微分方程式の表現論を用いた研究においては，日本で有数の研究者の一人である．その著者による演習形式のリー群とリー環論の解説が本書である．リー群やリー環の教科書のたぐいは大量に出版されているが，世界広しと言えども，まだリー理論の演習書にお目にかかったことがない．著者の慧眼というべきであろう．

リー群やリー環は理論物理学を始め，純粋数学においてもいたるところで“使われ”ているが，実際のところ，その基礎的な理論は大学の講義ではほとんど扱われない．一方，大学院に入学するとリー理論は既知とされ，途方に暮れてしまう，というのはよく聞かされる嘆き節である．そこにこそまさしく本書の存在意義がある．

本書は，大学初年級の微積分と線形代数学を仮定して，リー群やリー環を具体的な行列として導入し，演習を交えながら徐々に一般論へと導くという構成になっている．具体的に内容を見ると，まず最初に回転群やその親類である行列群，そして行列の指数関数について学んだ後，リー環の導入，閉線形群の位相や準同型の紹介を行う．そして $SU(2), SL(2,\mathbb{C})$ およびそのリー環の表現，$SU(3), SL(3,\mathbb{C})$ の表現論が紹介され，最後の章では極大トーラスとコンパクト群の共役類の関係について解説されている．

リー群・リー環論に関しては，世界的に著名な教科書が多数あるが，どれも大部なものが多い．リー環論だけでなく，リー群論にも踏み込んだ教科書としては，筆者の知る限り，本書はもっともコンパクトにまとまった教科書の一つである．学部から大学院にかけて，講義に頼らず自習する際には力強い味方になるだろう．

ところで，本書で採用されている演習形式というのは，なかなかの妙案である．筆者の大学の授業アンケートでは，受講生から「証明はなくてもいいから，もっと例題と演習をやって下さい」というお叱りをよくいただく．しかし，実は定理や命題は立派な演習問題なのである．そのことは本書がまったくよく証明している．というのも，本書では，重要と思われる定理をステップを踏んで，いくつかの演習・例題の形で解説していることが多いからである．これには，なるほど，その手があったか，とつい膝を打って感心してしまった．定理は例題，命題や補題は演習と銘打っておけば，その証明は演習問題の解答となり，学生たちの注目のマトとなる．例題とその模範解答を覚える要領で，定理とその証明を覚え込んでしまえば，もう向かうところ敵なしである．

もちろん本書がそのような構成になっているからといって，べつに重要な定理の証明がおろそかになっているわけではないから，その点は心配はしないでよい．定理が例題や演習の形になっても正確さと証明の要点を失わないようにする．おそらく著者の一番腐心した点はこれであろう．

リー群とは，多様体で，かつ群になっており，その演算が可微分写像であるようなもののことであるが，本書では，あえて一般の多様体ではなく，閉線形群を扱い，あまりにも抽象すぎる一般論をうまく回避している．本書における唯一と言っていいほど重要なツールは行列の指数関数であり，リー群の扱い方は可微分多様体というよりも位相群論的な扱いである．一方で，リー群上のハール測度（不変測度）を導入するときには，可微分多様体として微分形式をうまく用いるなど著者の考え抜いた（苦しみ抜いた？）構成が胸を打つ．

我が畏友，太田琢也氏に教わったことだが，行列の指数関数はさても本質的かつ有用な道具である．これはリー群に限った話だけではなく，微分方程式論においても然り，そして代数群の理論においても然りである．想像するに，太田氏は行列の指数関数の重要性を佐武一郎氏の教科書から学んだのではないかと思う．本書はそのようなわけで，シュバレー，そして佐武の流れを汲む本格的なリー群（そしてリー環）への入門書である．ぜひ一読を勧めたい．

西 山 享（青山学院大学理工学部）

「数理科学」は語る

30年前から現代へのメッセージ

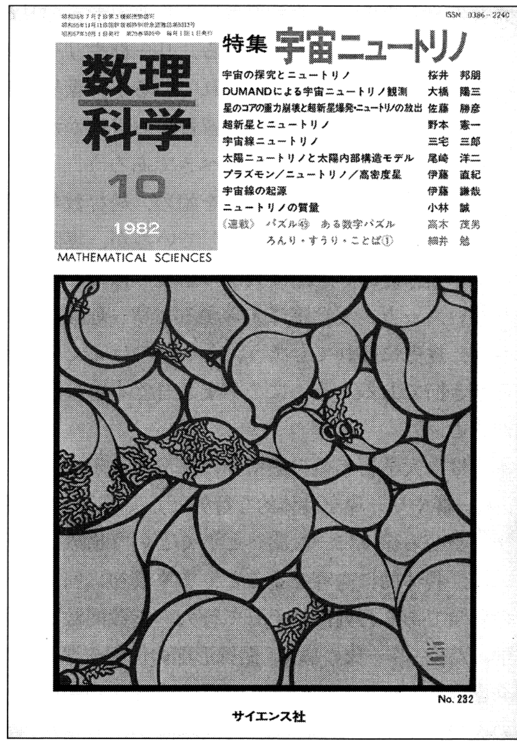
野本　憲一

1982年10月号

ちょうどシアトルで開催中の重力崩壊型超新星のワークショップ（2012年7月）の合間にこの原稿を書いている．超新星ニュートリノの解説を書いた30年前は，超新星の爆発機構として，理論的には白色矮星の熱核爆発（Ia型）と大質量星の重力崩壊（II型）が提唱されていたが，それらは球対称を仮定した流体力学の計算に基づく初歩的なもので，ニュートリノ放射の予測も現実感に乏しいものであった．しかし，それは1987年に近傍の銀河大マゼラン雲で出現した超新星1987Aからのニュートリノが，神岡の観測装置で観測されたことによって，一気に現実のものとなった．小柴昌俊氏のノーベル賞受賞へとつながったこの歴史的観測は，星の重力崩壊が確かに起こり原始中性子星が形成されたことを，ものの見事に証明した．しかし，星の中心への落下が激しい爆発へと転ずる機構の理論的な解明は半世紀を超える未解決の大問題として残された．現在3次元の流体力学と6次元のボルツマン方程式を解くという大規模な数値計算によって，ニュートリノで加熱されたガスの激しい対流運動と，原始中性子星の大規模で非対称な振動がシミュレートされ，どの過程が本質的な爆発機構なのか，シアトルでも研究グループの間で激しい論争が繰り広げられている．

このような理論物理，計算物理の総力を挙げての挑戦が続けられている間に，超新星の観測は爆発的な進展を見せ，新種の超新星が続々と発見されている．その最たるものがガンマ線を突発的に放射するガンマ線バーストである．永い間正体不明だったこの現象は，通常の超新星の10倍以上のエネルギーで爆発する「極超新星」に伴ったものであることが観測的に確認された．巨大エネルギーの発生機構は理論研究への新たな挑戦である．

一方，白色矮星の熱核爆発であることがほぼ確実となったIa型超新星は，遠方の銀河の距離を測る道具として，その大規模な探査が1990年代の前半から始められた．それが宇宙膨張を加速させる謎の斥力源「ダークエネルギー」の発見となり，競い合って観測した2つのグループに昨年のノーベル賞が授与された．30年前というのは，2つのノーベル賞を生んだ，超新星の観測による2つの大発見の前夜だったのである．



現在，超新星の爆発や中性子星の合体による重力波の放射の詳しい理論的予測計算がなされ，重力波の巨大観測装置の準備が進められ，重力波の歴史的な観測の前夜と言うべき状況が生まれつつある．そして，正体不明のダークエネルギーの発見は物理学の根幹に関わる大問題を提起し，東京大学に創設されたカブリ数物連携宇宙研究機構の目指すような，数学と物理の新たな連携・融合による研究を生み出しつつある．

（のもと・けんいち，東京大学国際高等研究所カブリ数物連携宇宙研究機構）

大学院入試問題からみた

大学の数学

数学のより深い理解を目指す

第2回

微積分1

ガウス積分と微分・積分の順序交換

海老原 円・太田 雅人

2.1 今回のテーマはガウス積分

この連載第1回目のテーマは「線形代数」であったが，今回は「微積分」である．ひと口に微積分と言ってもその範囲は広いが，まずは，**ガウス積分**

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx \tag{2.1}$$

から始めたい．その理由を簡単に述べる．関数 e^{-x^2} 自身は初等関数（高校までに習った関数の**有限回**の操作で得られる関数）であるが，よく知られているように，その不定積分は初等関数で表すことはできない．そのため，まず，$R>0$ に対して

$$\int_0^{R} e^{-x^2}\,dx$$

を計算し，次に，$R\to\infty$ として極限を計算するという方針でガウス積分 (2.1) の値を求めることは難しい．すなわち，高校までの知識だけでは計算できないのである．一方，これまたよく知られているように，重積分を使えば (2.1) は簡単に計算できる．そのため，大学でちゃんと微積分を勉強したかどうかを確かめるために，ガウス積分に関する問題は大学院入試問題として適当なのである．もちろん，それだけが理由というわけではないと思うが，ガウス積分に関する問題は頻繁に出題されている．例えば，次の問題を考えよう．

問題 2.1 （東京大学大学院新領域創成科学研究科複雑理工学専攻，平成 23 年度）
関数 $f(x,y)$ を

$$f(x,y)=\exp\left(-\frac{x^2+y^2-2Rxy}{2(1-R^2)}\right)$$

で定義する．ここで $\exp(t)=e^t$ である．以下の問に答えよ．

(問 1)　$R=0$ とする．

(1)　$x=r\cos\theta$ および $y=r\sin\theta$ $(0\leq r<\infty,\ 0\leq\theta<2\pi)$ と変数変換する．その際のヤコビアンを求めよ．

(2)　(1) の変数変換を用いて，定積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dxdy$ を求めよ．

(3)　(2) で求めた定積分を用いて，以下の式を示せ．ただし，$a>0$ とする．

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-ax^2)\,dx=\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

(問 2)　$-1<R<1$ とし，$g(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dy$ とする．

(1)　$g(x)$ を求めよ．また，任意に与えた x_0 に対して $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}xg(x-x_0)\,dx$ を求めよ．

(2)　$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}x^2g(x)\,dx$ および $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}x^4g(x)\,dx$ を求めよ．

(問 3)　$-1<R<1$ とする．$f(x,y)$ に関する以下の定積分を求めよ．

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}yf(x,y)\,dxdy$$

なお，実際の問題文にはヒントとして，問 2 および問 3 の後に「必要であれば問 1 の (3) の結果を用いて良い」との親切な注意が付いている．また，私は「ここで $\exp(t)=e^t$ である」という説明は不要ではないかと思ったが，先日，ある大学の講義でこの問題を使ったところ，ある学生から「先生，その exp というのは何ですか？」という質問を受け，問題 2.1 の出題者の心配りに感服した次第である．ちなみに，その学生は続けて「**ヤコビアン**とは何ですか？」と質問してきたが，親切な出題者もヤコビアンの説明までは想定外であったに違いない．

2.2 問 1 の解答例

(1)　変数変換 $x=r\cos\theta,\,y=r\sin\theta$ のヤコビアンは

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial\theta}\\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial\theta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r.$$

(2)　求める定積分を I とおく．$R=0$ だから

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)dxdy.$$

ここで，(1) の変数変換（**極座標変換**）により，積分領域である xy 平面全体は $E=\{(r,\theta):0\leq r<\infty,\ 0\leq\theta<2\pi\}$ に対応するので

$$I=\iint_E e^{-r^2/2}\,rdrd\theta=2\pi\int_0^{\infty}re^{-r^2/2}\,dr=2\pi\left[-e^{-r^2/2}\right]_0^{\infty}=2\pi.$$

(3)　(2) より

$$2\pi = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) dxdy$$
$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}\, dy\right) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}\, dt\right)^2.$$

ここで，$e^{-t^2/2} > 0$ だから

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}\, dt = \sqrt{2\pi}.$$

よって，$a > 0$ に対して，$t = \sqrt{2a}\,x$ と変数変換すれば

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2a}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}\, dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

を得る．　　　　**問 1 の解答終わり**

問 1 はガウス積分を求める標準的な解法を問題にしたものである．定積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi} \tag{2.2}$$

は 1 変数関数の積分の問題であるにも関わらず，重積分を使って計算するところが面白い．大学の微積分の講義における一つの山場である．私は重積分の講義をするとき，他の細かいことは忘れても構わないので，この計算方法だけは覚えておいてほしいと，その重要性を強調している．定積分 (2.2) を 1 変数の微積分だけを用いて計算することは可能である（例えば，参考文献 1) p.178, 第 4 章 問題 21 を参照のこと）が，上述の重積分を用いた計算と比べると，技巧的であるとの感は否めない．

さて，ガウス積分 (2.2) と同様に重要な広義積分として

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \lim_{R\to\infty}\int_0^{R} \frac{\sin x}{x}\, dx \tag{2.3}$$

がある．関数 $\sin x/x$ の不定積分も初等関数で表すことができないため，1 変数の微積分だけを用いて，広義積分 (2.3) を計算することは難しい．こちらは変数を実数から複素数に拡張して，複素関数論を用いれば簡単に計算することができるが，詳細は後日この連載で解説する予定である．

2.3 問 2 の解答例

(1)　まず，$x^2 + y^2 - 2Rxy = (y - Rx)^2 + (1 - R^2)x^2$ より

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dy = e^{-x^2/2}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(y-Rx)^2}{2(1-R^2)}\right) dy$$
$$= e^{-x^2/2}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2(1-R^2)}\right) dt = \sqrt{2\pi(1-R^2)}\, e^{-x^2/2}.$$

ここで，最後の等式において，問 1 (3) の結果を用いた．

これから，実数 x_0 に対して

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} xg(x-x_0)\,dx &= \int_{-\infty}^{\infty}(t+x_0)g(t)\,dt \\ &= \sqrt{2\pi(1-R^2)}\left(\int_{-\infty}^{\infty} te^{-t^2/2}\,dt + x_0\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}\,dt\right).\end{aligned}$$

ここで，$te^{-t^2/2}$ は奇関数だから，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} te^{-t^2/2}\,dt = 0$.　また，問 1 (3) より，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}\,dt = \sqrt{2\pi}$ だから

$$\int_{-\infty}^{\infty} xg(x-x_0)\,dx = 2\pi\sqrt{1-R^2}\,x_0.$$

(2)　問 1 (3) より，$a>0$ に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2)\,dx = \sqrt{\pi}\,a^{-1/2}$$

である．これを a で微分すると，左辺は

$$\frac{d}{da}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial a}\exp(-ax^2)\,dx = -\int_{-\infty}^{\infty} x^2\exp(-ax^2)\,dx$$

であり，右辺は $-\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}a^{-3/2}$ となる．よって

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2\exp(-ax^2)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}a^{-3/2}. \tag{2.4}$$

さらに，これを a で微分すれば

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^4\exp(-ax^2)\,dx = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}\,a^{-5/2}. \tag{2.5}$$

特に，(2.4), (2.5) において $a=1/2$ とすると

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-x^2/2}\,dx = \sqrt{2\pi}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^4e^{-x^2/2}\,dx = 3\sqrt{2\pi}.$$

これから

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} x^2g(x)\,dx &= \sqrt{2\pi(1-R^2)}\int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-x^2/2}\,dx = 2\pi\sqrt{1-R^2}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^4g(x)\,dx &= \sqrt{2\pi(1-R^2)}\int_{-\infty}^{\infty} x^4e^{-x^2/2}\,dx = 6\pi\sqrt{1-R^2}\end{aligned}$$

を得る．　　　　**問 2 の解答終わり**

2.4 微分と積分の順序交換

問 2 (2) の主題は**微分と積分の順序交換**（積分記号下の微分）である．上の解答例では，何気なく，微分と積分の順序交換

$$\frac{d}{da}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial a}\exp(-ax^2)\,dx \tag{2.6}$$

を行ってしまったが，このような順序交換ができることを確かめる必要がある．否，数学の専門家でない限り，そんなことは確かめる必要はないという人もいるかも知れない．しかしながら，私としては，数学を道具として使う人にも，順序交換をする前に，その条件を確認してほしいと思う．それは，微分と積分の順序交換ができない場合が実際に存在し，そのために間違った計算をしてしまうことがあるからである．何よりも，その条件はそれほど複雑なものではなく，それを確かめることによって安心して順序交換ができれば，使う立場としてもよいことではないだろうか．

さて，積分を**広義リーマン積分**と考えるか，**ルベーグ積分**と考えるかによって，その条件は若干異なるが，今の場合に適用でき，比較的分かりやすい形の定理を述べる．

定理 2.1　$-\infty \leq \alpha < \beta \leq \infty$ とし，$I = (\alpha, \beta)$ とおく．J は区間とし，$f(x,t)$ は $I \times J$ 上で定義された連続関数とする．また，$f(x,t)$ は t に関して偏微分可能で，$\dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ は $I \times J$ で連続とする．さらに，すべての $(x,t) \in I \times J$ に対して

$$|f(x,t)| \leq g_0(x), \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq g_1(x) \tag{2.7}$$

をみたし，かつ

$$\int_\alpha^\beta g_0(x)\,dx < \infty, \qquad \int_\alpha^\beta g_1(x)\,dx < \infty \tag{2.8}$$

をみたす I 上の非負値関数 $g_0(x)$, $g_1(x)$ が存在すると仮定する．このとき，J 上の関数

$$F(t) = \int_\alpha^\beta f(x,t)\,dx$$

は微分可能で，すべての $t \in J$ に対して

$$F'(t) = \int_\alpha^\beta \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx$$

が成り立つ．　□

この定理において，積分は広義リーマン積分でもルベーグ積分でもどちらでもよいが，広義リーマン積分とした場合の証明は，例えば，参考文献 2) pp.223–225 にある．

さて，この定理 2.1 を用いて，(2.6) を確かめてみよう．今の場合，パラメータは $a > 0$ であるが，一旦，a の動く範囲を $J = [\delta, 1/\delta]$ $(0 < \delta < 1)$ に制限し，$I = (-\infty, \infty)$, $f(x,a) = \exp(-ax^2)$ とおく．このとき，$f(x,a)$ が $I \times J$ で連続であり，a に関して偏微分可能で

$$\frac{\partial f}{\partial a}(x,a) = -x^2 \exp(-ax^2)$$

が $I \times J$ で連続であることは明らか．実際に確かめる必要があるのは，(2.7), (2.8) をみたす非負値関数 $g_0(x)$, $g_1(x)$ の存在である．ここで，パラメータ a の動く範囲を $J = (0, \infty)$ としたのではうまくいかない．そのため，$0 < \delta < 1$ をとり，$J = [\delta, 1/\delta]$ と制限したのである．実際，$(x,a) \in I \times J$ に対して

$$0 \leq f(x,a) = \exp(-ax^2) \leq \exp(-\delta x^2) =: g_0(x),$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial a}(x,a)\right| = x^2 \exp(-ax^2) \leq x^2 \exp(-\delta x^2) =: g_1(x)$$

であり，$\delta > 0$ だから

$$\int_0^\infty g_0(x)\,dx = \int_0^\infty \exp(-\delta x^2)\,dx < \infty,$$

$$\int_0^\infty g_1(x)\,dx = \int_0^\infty x^2 \exp(-\delta x^2)\,dx < \infty$$

が成り立つ．以上から，定理 2.1 が適用でき

$$F(a) = \int_{-\infty}^\infty \exp(-ax^2)\,dx$$

は $J = [\delta, 1/\delta]$ において微分可能で，すべての $a \in J$ に対して

$$F'(a) = \int_{-\infty}^\infty \frac{\partial}{\partial a}\exp(-ax^2)\,dx = -\int_{-\infty}^\infty x^2 \exp(-ax^2)\,dx \tag{2.9}$$

が成り立つ．さらに，$\delta > 0$ はいくらでも小さくとることができるので，$F(a)$ は区間 $(0,\infty)$ で微分可能で，すべての $a > 0$ に対して (2.9) が成り立つことが分かる．上の議論において，**はじめから $\delta = 0$ としたのではうまくいかない**ことに注意してほしい．このようなちょっとしたことに注意すれば，定理 2.1 を使いこなすことはそれほど難しいことではない．もちろん，何事も経験が必要で，そのためには練習を積んで慣れるしかない．この連載では今後とも，このような議論と計算を提供する予定である．

2.5 問 3 の解答例

まず，求めるべき定積分を

$$I = \int_0^\infty \int_0^\infty y f(x,y)\,dxdy = \int_0^\infty \int_0^\infty y \exp\left(-\frac{x^2+y^2-2Rxy}{2(1-R^2)}\right) dxdy$$

とおく．このとき，x と y に関する対称性から

$$I = \int_0^\infty \int_0^\infty x f(x,y)\,dxdy$$

である．また

$$h(x) = \int_0^\infty f(x,y)\,dy$$

とおくと

$$h'(x) = \frac{d}{dx}\int_0^\infty f(x,y)\,dy = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}\exp\left(-\frac{x^2+y^2-2Rxy}{2(1-R^2)}\right) dy$$
$$= -\int_0^\infty \frac{x-Ry}{1-R^2} f(x,y)\,dy$$

だから

$$\int_0^\infty h'(x)\,dx$$
$$= \frac{R}{1-R^2}\int_0^\infty\int_0^\infty yf(x,y)\,dxdy - \frac{1}{1-R^2}\int_0^\infty\int_0^\infty xf(x,y)\,dxdy$$
$$= \frac{R}{1-R^2}I - \frac{1}{1-R^2}I = -\frac{1}{1+R}I.$$

一方，$f(x,y)>0$ だから，問 2 (1) より

$$0 \le h(x) = \int_0^\infty f(x,y)\,dy \le \int_{-\infty}^\infty f(x,y)\,dy = \sqrt{2\pi(1-R^2)}\,e^{-x^2/2}.$$

よって，$\lim_{x\to\infty} h(x) = 0$. また，問 1 (3) より

$$h(0) = \int_0^\infty f(0,y)\,dy = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{y^2}{2(1-R^2)}\right)dy = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi(1-R^2)}$$

だから，微積分学の基本定理により

$$\int_0^\infty h'(x)\,dx = \lim_{x\to\infty} h(x) - h(0) = -\frac{1}{2}\sqrt{2\pi(1-R^2)}.$$

ゆえに，求めるべき定積分の値は

$$I = \frac{1+R}{2}\sqrt{2\pi(1-R^2)}$$

である．

問 3 の解答終わり

2.6 もう 1 題

最後にもう 1 題，ガウス積分が現れる問題を考えよう．これはガウス関数のフーリエ変換に関する問題であり，やはり超頻出問題である．

問題 2.2　(東北大学大学院工学研究科応用物理学専攻，平成 21 年度)　b を正の定数として，次の積分を考える．

$$I(a) = \int_0^\infty e^{-bx^2}\cos 2ax\,dx$$

(1)　$I(0)$ を求めよ．必要なら，$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を使ってもよい．

(2)　$\frac{dI(a)}{da}$ を $I(a)$ を用いて表せ．

(3)　設問 (2) の結果を用いて $I(a)$ を求めよ．

解答例　(1)　$t=\sqrt{b}\,x$ と変数変換すれば

$$I(0) = \int_0^\infty e^{-bx^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{b}}\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{4b}}.$$

(2)　微分と積分の順序交換を行う．

$$\frac{dI(a)}{da} = \frac{d}{da}\int_0^\infty e^{-bx^2}\cos 2ax\,dx = \int_0^\infty e^{-bx^2}\frac{\partial}{\partial a}\cos 2ax\,dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^\infty (-2x)e^{-bx^2}\sin 2ax\,dx = \frac{1}{b}\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-bx^2}\right)\cdot \sin 2ax\,dx \\
&= \frac{1}{b}\left\{[e^{-bx^2}\sin 2ax]_{x=0}^{\infty} - \int_0^\infty e^{-bx^2}2a\cos 2ax\,dx\right\} \\
&= -\frac{2a}{b}\int_0^\infty e^{-bx^2}\cos 2ax\,dx = -\frac{2a}{b}I(a).
\end{aligned}
$$

(3) (2) で得られた微分方程式

$$
\frac{dI(a)}{da} = -\frac{2a}{b}I(a)
$$

は**変数分離型**と考えてもよいし，**1 階線形方程式**と考えてもよい．いずれにしても，簡単に求積でき，求める答えは

$$
I(a) = I(0)e^{-a^2/b} = \sqrt{\frac{\pi}{4b}}e^{-a^2/b}
$$

となる． **解答終わり**

上の解答例 (2) において，微分と積分の順序交換を行った．工学系の大学院入試問題の答案として，順序交換が可能であることを確かめることが求められているかどうかは分からない（多分そこまでは求められていないと思う）が，練習のために定理 2.1 の条件を確かめておこう．

$(x,a) \in (0,\infty)\times(-\infty,\infty)$ に対して $f(x,a) = e^{-bx^2}\cos 2ax$ とおく．このとき，$f(x,a)$ の連続性および微分可能性は明らか．また，すべての $(x,a) \in (0,\infty)\times(-\infty,\infty)$ に対して

$$
\begin{aligned}
&|f(x,a)| = |e^{-bx^2}\cos 2ax| \le e^{-bx^2}, \\
&\left|\frac{\partial f}{\partial a}(x,a)\right| = |-2xe^{-bx^2}\sin 2ax| \le 2xe^{-bx^2}
\end{aligned}
$$

であり，$b>0$ だから

$$
\int_0^\infty e^{-bx^2}\,dx < \infty, \qquad \int_0^\infty xe^{-bx^2}\,dx < \infty.
$$

よって，定理 2.1 より，すべての $a \in (-\infty,\infty)$ に対して

$$
\frac{d}{da}\int_0^\infty e^{-bx^2}\cos 2ax\,dx = \int_0^\infty e^{-bx^2}\frac{\partial}{\partial a}\cos 2ax\,dx
$$

が成り立つ．

今回はここまでにしよう．次回は再び，線形代数に関する問題を取り扱う．

参考文献

1) 宮島静雄，『微分積分学 I—1 変数の微分積分—』，共立出版，2003 年．
2) 宮島静雄，『微分積分学 II—多変数の微分積分—』，共立出版，2003 年．

（えびはら・まどか，埼玉大学大学院理工学研究科）
（おおた・まさひと，東京理科大学理学部）

Tsallisの q エントロピー，エスコート幾何，共形幾何

甘利 俊一

統計学や統計物理学では，これまで正則の世界で理論が構築されてきた．そこではガウス分布などの指数型分布族（Boltzmann 統計）が主役を演じ，中心極限定理が成立する．

しかし，これとは異なる法則に支配される世界，パワー則の世界が浮かび上がってきた．Tsallis[1)] や Naudts[2)] らの先導する q 物理学は，指数型の Gibbs 分布の代わりに，べき乗で表される確率分布を使う．情報幾何では確率の表現に p_i と $\log p_i$ を使ったが，ここでは p_i^q を用いる．べき乗則に従う分布が近年関心を集めている．これはいわゆる裾の長い分布族であり，スケールフリーとも呼ばれ，災害などの現象や経済現象にもよく表れる[*1)]．Tsallis は，べき乗型のエントロピー（q エントロピー）を導入し，伝統的な Gibbs 分布（指数型分布）に従わない物理現象とその法則を調べ，一つの体系を築いている．

これに対応する幾何学は情報幾何で建設された α 幾何学である．α エントロピー，α ダイバージェンスなど，不変性に基づく幾何学でこれまでも触れてきた．$q=(1+\alpha)/2$ とおいたものが q 幾何で，新しいものではない．しかし，不変性に捉われなければ，q エントロピーをもとに，双対平坦な幾何が作れる．これは q 物理学から出た新しい話題である．

p_i^q というべき乗分布を規格化すれば新しい確率分布が得られる．これをエスコート(同伴)分布と言う．これはいかなる幾何構造をもたらすか，これが今回の話題である．これが不変な幾何学から，共形変換で得られることを明らかにする．

17.1 確率と測度の表現：べき乗を含む一般の表現

情報幾何は，確率 p_i を対数 $\log p_i$ を用いて表現し，p_i と $\log p_i$ を座標系と

*1) 個人の所得の分布（パレートの法則）がこれであり，少数の金持ちが巨大な所得を独占する．

する双対の世界を作ってきた．対数の代わりにべき乗の表現を用いる方法，さらにそれを一般化した表現から始めよう．q 構造の確率分布を述べる前に，正測度の世界 $\boldsymbol{R}_+^{n+1}$ で一般の非線形の表現で話を始めよう．確率分布族は $\sum p_i = 1$ を満たすその部分空間と考える．

$X = \{0, 1, \cdots, n\}$ の上に値を取る離散変数 x を考え，X 上の正測度を

$$m(x, \boldsymbol{\xi}) = \sum \xi_i \delta_i(x), \quad i = 0, 1, \cdots, n \tag{17.1}$$

と表す．$\boldsymbol{\xi} = (\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_n)$ で，ξ_i が $x = i$ の測度であり，$\sum \xi_i = 1$ が成立すれば確率分布である．測度分布の全体 M は $\boldsymbol{\xi}$ を座標系とする多様体 $\boldsymbol{R}_+^{n+1}$ である．

2 つの単調増大な関数 $u(\xi), v(\xi)$ が，ともに

$$u(0) = v(0) = 0 \tag{17.2}$$

を満たすとする．このとき，測度 ξ のスケールを変えた

$$\theta_i = u(\xi_i), \quad \eta_i = v(\xi_i) \tag{17.3}$$

を，それぞれ測度 ξ_i の u 表現，v 表現と呼ぶ*2)．$\boldsymbol{\theta} = (\theta_i)$ および $\boldsymbol{\eta} = (\eta_i)$ はどちらも $\boldsymbol{R}_+^{n+1}$ の座標系をなす．べき乗の世界は，$u(\xi)$ として ξ^q の形の冪関数を用いる．$u(\xi)$ として対数 $\log \xi$ をとるのがこれまでの世界であった．

u, v 表現をもとに，$\boldsymbol{R}_+^{n+1}$ に双対平坦な幾何学を導入しよう．それは，u, v 表現である $\boldsymbol{\theta}$ および $\boldsymbol{\eta}$ を，それぞれアファイン座標および双対アファイン座標として持つように幾何構造を定めることである．これを，(u, v) 幾何構造と呼ぶ．

定理 17.1 (u, v) 幾何構造は双対平坦で，2 つのポテンシャル関数は

$$\psi(\boldsymbol{\theta}) = \sum \int\!\!\int \frac{v'\{u^{-1}(\theta_i)\}}{u'\{u^{-1}(\theta_i)\}} (d\theta_i)^2, \tag{17.4}$$

$$\varphi(\boldsymbol{\eta}) = \sum \int\!\!\int \frac{u'\{v^{-1}(\eta_i)\}}{v'\{v^{-1}(\eta_i)\}} (d\eta_i)^2 \tag{17.5}$$

で与えられ，2 点 P, Q の規範ダイバージェンスは

$$D[P:Q] = \psi(\boldsymbol{\theta}_P) + \varphi(\boldsymbol{\eta}_\theta) - \boldsymbol{\theta}_P \cdot \boldsymbol{\eta}_Q, \tag{17.6}$$

計量は $\boldsymbol{\theta}$ 座標で

$$g_{ij} = \frac{v'(\xi_i)}{u'(\xi_i)} \delta_{ij}, \tag{17.7}$$

3 階のテンソルは

$$T_{ijk} = \sum \psi'''(\theta_i) \delta_{ijk} \tag{17.8}$$

で与えられる．

---

*2) 確率の α 表現は情報幾何で導入された．J. Zhang はこれを一般化し，表現についての双対性と構造についての双対性に分けることを試みた[3,4]．

証明は，$\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta}$ がそれぞれ平坦，双対平坦座標であることから出発し，

$$\eta_i = \frac{\partial \psi(\boldsymbol{\eta})}{\partial \theta_i} \tag{17.9}$$

が成立することを用い，これを積分すれば (17.4) が得られる．あとは容易である．

確率分布のなす空間 S_n は，$\sum p_i = 1$，すなわち

$$\sum u^{-1}(\xi_i) = 1, \quad \sum v^{-1}(\xi_i) = 1 \tag{17.10}$$

を満たす部分空間である．これは u か v のどちらかが線形である場合を除いて，平坦にはならない．

正測度分布 $m(x)$ または確率分布 $p(x)$ を u 表現をしたときに，これがパラメータ $\boldsymbol{\theta}$ を用いて線形に書けるとき，すなわち関数 $k_i(x)$ を用いて，それぞれ

$$u\{m(x, \boldsymbol{\theta})\} = \sum \theta^i k_i(x), \tag{17.11}$$

$$u\{p(x, \boldsymbol{\theta})\} = \sum \theta^i k_i(x) - \psi(\boldsymbol{\theta}) \tag{17.12}$$

となるとき，これを u^{-1} 分布族と呼ぶ．$u(\xi) = \log \xi$ のとき，u^{-1} は指数関数であり，指数型分布族が得られる．

$\boldsymbol{R}_+^{n+1}$ および S_n 自体は，任意の u について，u^{-1} 分布族をなすことは次の形で容易に理解できよう．

$$u\{m(x, \boldsymbol{\xi})\} = \sum_{i=0}^{n} u(\xi_i)\, \delta_i(x) = \sum \theta_i \delta_i(x), \tag{17.13}$$

$$\begin{aligned} u\{p(x, \xi_i)\} &= \sum_{i=1}^{n} \{u(\xi_i) - u(\xi_0)\}\, \delta_i(x) - \psi \\ &= \sum \theta_i \delta_i(x) - \psi(\boldsymbol{\theta}). \end{aligned} \tag{17.14}$$

確率分布族における u^{-1} 分布族は $\boldsymbol{R}_+^n$ の曲部分空間をなし，一般に双対平坦ではない．これを平坦にする仕組みは後に論ずる．ここから，不変性にとらわれない新しい平坦な世界を構築できる．例を挙げる．

1．指数型構造

$$u(\xi) = \log \xi, \quad v(\xi) = \xi \tag{17.15}$$

ならば，

$$\theta_i = \log \xi_i, \quad \eta_i = \xi_i. \tag{17.16}$$

分布は

$$m(x, \boldsymbol{\xi}) = \exp\left\{\sum_{i=0}^{n} \theta_i \delta_i(x)\right\}, \tag{17.17}$$

$$p(x, \boldsymbol{\xi}) = \exp\left\{\sum_{i=1}^{n} \theta_i \delta_i(x) - \psi(\boldsymbol{\theta})\right\} \tag{17.18}$$

と書ける．ポテンシャル関数は

$$\psi(\boldsymbol{\theta}) = \log \sum e^{\theta_i}, \quad \varphi(\boldsymbol{\eta}) = \sum \eta_i \log \eta_i - \sum \eta_i, \tag{17.19}$$

ダイバージェンスはKLダイバージェンス

$$D\left[\boldsymbol{\theta}_P : \boldsymbol{\theta}_Q\right] = KL\left[\boldsymbol{\theta}_P : \boldsymbol{\theta}_Q\right] = \sum \left(\xi_{P_i} - \xi_{Q_i} + \xi_{P_i} \log \frac{\xi_{P_i}}{\xi_{Q_i}}\right) \tag{17.20}$$

になり，計量と3階のテンソルは

$$g_{ij}(\boldsymbol{\theta}) = e^{\theta_i}\delta_{ij}, \quad T_{ijk}(\boldsymbol{\theta}) = e^{\theta_i}\delta_{ijk} \tag{17.21}$$

である．これによる確率分布族は指数型分布族になり，双対平坦である．

2. α-β **構造**

2つの実パラメータ α, β を用い，

$$u(\xi) = \xi^{\alpha}\ ,\ v(\xi) = \xi^{\beta} \tag{17.22}$$

と定義する．このとき，

$$\theta^i = (\xi_i)^{\alpha}, \quad \eta_i = (\xi_i)^{\beta} \tag{17.23}$$

である．ポテンシャル関数は

$$\psi(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \sum \theta_i^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha}}, \quad \varphi(\boldsymbol{\eta}) = \frac{\beta}{\alpha+\beta} \sum \eta_i^{\frac{\alpha+\beta}{\beta}}, \tag{17.24}$$

計量は

$$g_{ij}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\beta}{\alpha}\xi_i^{\beta-\alpha}\delta_{ij}, \tag{17.25}$$

3階のテンソルは

$$T_{ijk}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\beta(\beta-\alpha)}{\alpha^2}\xi_i^{\beta-2\alpha}\delta_{ijk}, \tag{17.26}$$

さらにダイバージェンスは α-β ダイバージェンス

$$D[P:Q] = \sum \left\{ \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left(\xi_i^P\right)^{\alpha+\beta} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\left(\xi_i^Q\right)^{\alpha+\beta} - \left(\xi_i^P\right)^{\alpha}\left(\xi_i^Q\right)^{\beta} \right\} \tag{17.27}$$

である．$\alpha = 1$ または $\beta = 1$ の場合を除けば，確率分布族は平坦ではない．

3. α **構造（**q **構造）**

上記の α-β 構造で，$\alpha + \beta = 1$ となる場合が α 構造と呼ばれる．ここでは，(α, β) の代わりにあらためて $1-q=(1-\alpha)/2$, $q=(1+\alpha)/2$ を用いる．このとき，u, v はそれぞれ

$$u(\xi) = \xi^{\frac{1-\alpha}{2}} = \xi^{1-q}, \quad v(\xi) = \xi^{\frac{1+\alpha}{2}} = \xi^{q}, \tag{17.28}$$

$$\theta_i = \xi_i^{\frac{1-\alpha}{2}} = \xi_i^{1-q}, \quad \eta_i = \xi^{\frac{1+\alpha}{2}} = \xi_i^{q} \tag{17.29}$$

である．ポテンシャル関数は

$$\psi(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1-\alpha}{2}\sum (\theta_i)^{\frac{2}{1-\alpha}} = \frac{1-\alpha}{2}\sum \xi_i, \tag{17.30}$$

$$\varphi(\boldsymbol{\eta}) = \frac{1+\alpha}{2}\sum (\eta_i)^{\frac{2}{1+\alpha}} = \frac{1+\alpha}{2}\sum \xi_i. \tag{17.31}$$

ダイバージェンスは α ダイバージェンスで

$$D_\alpha[P:Q] = \sum\left\{\frac{1-\alpha}{2}\xi_i^P + \frac{1+\alpha}{2}\xi_i^Q - \left(\xi_i^P\right)^{\frac{1-\alpha}{2}}\left(\xi_i^Q\right)^{\frac{1+\alpha}{2}}\right\} \tag{17.32}$$

で与えられる．

α 分布族（q 分布族）はべき乗を用いて

$$\{p(x,\boldsymbol{\theta})\}^{\frac{1-\alpha}{2}} = \{p(x,\boldsymbol{\theta})\}^{1-q} = \sum \theta_i\delta_i(x) - \psi(\boldsymbol{\theta}) \tag{17.33}$$

のように書ける．これは今迄に良く研究されてきた α 分布族であり，Tsallis の q 分布族も同じものである．

4. 江口の U 構造と β 構造

U を凸関数とする．これを用いて，$u(\xi) = U'(\xi)$ として

$$\theta = u(\xi), \tag{17.34}$$

$$\eta = v(\xi) = \xi \tag{17.35}$$

と定義するのが U 構造で，とくに，β を用いて

$$U(\xi) = \frac{1}{\beta+1}(1+\beta\xi)^{\frac{\beta+1}{\beta}} \tag{17.36}$$

とおくのが β 構造である．

(u,v) 構造から得られる計量は，一般に Fisher 情報行列とは異なるため，(u,v) 幾何は以前に述べた不変性の原理を満たさず，不変な幾何を与えない．参考のため，以前に述べた次の定理を再掲しておく．これは，KL ダイバージェンスおよび α ダイバージェンスを特徴づける．

定理 17.2　確率分布族 S_n で不変で平坦な幾何構造を与えるダイバージェンスは KL ダイバージェンスに限られる．これは log 表現を用いるもので，幾何学は Fisher 計量と e 接続および m 接続になる．正測度空間 $\boldsymbol{R}_+^{n+1}$ では，不変で平坦なダイバージェンスは α ダイバージェンスに限られる．このとき，Fisher 情報行列による計量と，α および $-\alpha$ 接続が出る．このときの分布族が α 分布族である．α の代わりに q で表現したものが，Tsallis の q 分布族である．

17.2 q 確率分布族と平坦構造

確率の α 表現 (17.28) の代わりに，同じことであるが q 表現

$$\log_q(u) = \frac{1}{1-q}\left(u^{1-q}-1\right) \tag{17.37}$$

を用いる．$\log_q$ は q 対数と呼ばれるもので，$q \to 1$ のとき普通の log になる．確率分布の q 対数が，パラメータ $\boldsymbol{\theta} = \left(\theta^1, \cdots, \theta^n\right)$ を用いて線形表現できるとき，すなわち

$$\log_q p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}) = \theta^i x_i - \psi(\boldsymbol{\theta}) \tag{17.38}$$

のときに，これを q 確率分布族と言う．$\boldsymbol{x}$ は離散に限らず連続であってもよい．ただし $\boldsymbol{x} = (x_i)$ は $p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta})$ が正の範囲を動くものとする．また，関数 $\psi(\boldsymbol{\theta})$ は規格化を行うためで，

$$\int \log_q p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{x} = 1 \tag{17.39}$$

を満たすように定める．q 分布族は $\alpha = 2q - 1$ とおけば，α 分布族に他ならない．

ここで $\log_q(u)$ の逆関数

$$\exp_q(u) = \{1 + (1-q)u\}^{\frac{1}{1-q}} \tag{17.40}$$

を導入する．これを q 指数関数と呼ぶ．すると q 分布族は

$$p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}) = \exp_q \{\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{x} - \psi(\boldsymbol{\theta})\} \tag{17.41}$$

と書ける．$\psi(\boldsymbol{\theta})$ を q 自由エネルギーと呼ぶ．

例えば q ガウス分布は，(μ, σ) をパラメータとして

$$\log_q(x, \boldsymbol{\theta}) = -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} = \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{x} - \psi(\boldsymbol{\theta}), \tag{17.42}$$

$$\boldsymbol{\theta} = \left(\frac{\mu}{\sigma^2}, -\frac{1}{2\sigma^2}\right), \quad \boldsymbol{x} = \left(x, x^2\right) \tag{17.43}$$

のように書ける．これは通常のガウス分布とは違い裾が指数的ではなく，x は有限の範囲に限られる．

離散変数 x の確率分布の全体 S_n は α 分布族であったから，当然 q 分布族である．このとき

$$\log_q p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{1-q} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left(p_i^{1-q} - p_0^{1-q}\right) \delta_i(x) + p_0^{1-q} - 1 \right\} \tag{17.44}$$

のように書ける．したがって，

$$\theta^i = \frac{1}{1-q} \left(p_i^{1-q} - p_0^{1-q}\right), \quad x_i = \delta_i(x), \tag{17.45}$$

規格化関数である ψ は

$$\psi(\boldsymbol{\theta}) = -\log_q p_0 \tag{17.46}$$

である．ただしここでは p_0 を $\boldsymbol{\theta}$ の関数と考える．

q 分布族（α 分布族）に，これまでと同様に不変な幾何構造を導入できる．それは Fisher 情報行列をリーマン計量とする α 幾何学である．しかし，不変性

にこだわらなければ，別の可能性が開ける．まず，出発点となる重要な定理から始める[5]．

定理 17.3　q 自由エネルギー $\psi(\boldsymbol{\theta})$ は $\boldsymbol{\theta}$ の凸関数である．

証明　まず $p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta})$ を $\boldsymbol{\theta}$ で 1 回微分すると，

$$\partial_i p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta}) = p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta})^q \left(x_i - \partial_i \psi\right), \tag{17.47}$$

2 回微分すると

$$\partial_i \partial_j p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta}) = q p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta})^{2q-1} (x_i - \partial_i \psi)(x_j - \partial_j \psi) - p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta})^q \partial_i \partial_j \psi \tag{17.48}$$

となる．これらを $\boldsymbol{x}$ で積分（離散分布のときは x についての和分）すると左辺は

$$\partial_i \int p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{x} = \partial_i \partial_j \int p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{x} = 0. \tag{17.49}$$

ここで確率分布 $p(\boldsymbol{x})$ の汎関数

$$h_q\left[p(\boldsymbol{x})\right] = \int p(\boldsymbol{x})^q d\boldsymbol{x} \tag{17.50}$$

を導入しておこう．すると，(17.47), (17.48) の右辺の積分を 0 と置いて

$$\partial_i \psi(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{h_q(\boldsymbol{\theta})} \int x_i p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta})^q d\boldsymbol{x}, \tag{17.51}$$

$$\partial_i \partial_j \psi(\boldsymbol{\theta}) = \frac{q}{h_q(\boldsymbol{\theta})} \int (x_i - \partial_i \psi)(x_j - \partial_j \psi) p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta})^{2q-1} d\boldsymbol{x} \tag{17.52}$$

が得られる．(17.52) 式の行列は正値 2 次形式となるから，$\psi(\boldsymbol{\theta})$ は凸関数である．

ここから得られる

$$g_{ij}^q = \partial_i \partial_j \psi(\boldsymbol{\theta}) \tag{17.53}$$

を q 情報行列と呼ぶ．これが q 幾何学のリーマン計量である．

凸関数は双対平坦な幾何学を導く．q 自由エネルギーの導く幾何学は，不変性より導かれる幾何学とは異なる．q 分布族はこの幾何では平坦であり，(17.38) 式または (17.41) 式の $\boldsymbol{\theta}$ がアファイン座標になる．ψ から導かれる q ダイバージェンスは

$$D_q\left[p(\boldsymbol{x}) : r(\boldsymbol{x})\right] = \frac{1}{(1-q) h_q[p(\boldsymbol{x})]} \left(1 - \int p(\boldsymbol{x})^q r(\boldsymbol{x})^{1-q} d\boldsymbol{x}\right) \tag{17.54}$$

である．これは $\alpha = 2q-1$ とおいたときの α ダイバージェンス $D_\alpha\left[p(\boldsymbol{x}) : r(\boldsymbol{x})\right]$ とは異なり，

$$D_q[p:q] = \frac{1}{h_q\left[p(\boldsymbol{x})\right]} D_\alpha[p:q] \tag{17.55}$$

で結ばれていて，不変なダイバージェンスではない．

17.3 双対座標とエスコート分布

q 幾何学は平坦であるから，その双対アファイン座標 $\boldsymbol{\eta}$ を計算する．話をわかりやすくするために，離散分布の空間 S_n を用いる．すると

$$\eta_i = \partial_i \psi(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{h_q(\boldsymbol{p})} p_i^q \tag{17.56}$$

が得られる．ここで，$\sum \eta_i = 1$ が成立しているので，双対アファイン座標 $\boldsymbol{\eta}$ はそのまま新しい確率分布を定める．$\boldsymbol{p} \in S_n$ から得られる新しい分布，

$$\hat{\boldsymbol{p}} = \frac{\nabla \psi}{h_q} = \left(\frac{1}{h_q} p_i^q \right) \tag{17.57}$$

を $\boldsymbol{p}$ のエスコート（同伴）分布と呼ぶ．

確率変数 $a(x), x = 0, 1, \cdots, n$ のエスコート分布による期待値を

$$\hat{E}_q \left[a(x) \right] = \sum \frac{a_i p_i^q}{h_q} \tag{17.58}$$

のように書く．すると q ダイバージェンスは q 期待値を用いれば

$$D_q[\boldsymbol{p} : \boldsymbol{r}] = \hat{E}_q \left[\log_q p_i - \log_q r_i \right] \tag{17.59}$$

のように書ける．

双対アファイン座標に対応する双対ポテンシャルは

$$\varphi_q(\boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{1-q} \left\{ \frac{1}{h_q(\boldsymbol{p})} - 1 \right\} \tag{17.60}$$

である．$-\varphi_q(\boldsymbol{\eta})$ を q エントロピーと名付ける．ここで，比例定数と定数を無視して，

$$H_q(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{h_q(\boldsymbol{p})} \tag{17.61}$$

と書けば，これは Tsallis の用いたエントロピー $-h_q(\boldsymbol{p})$ とは関数関係にあるが，それとは違う．

q エントロピーは，分布 $\boldsymbol{p}$ から一様分布 $\mathbf{1}$ への q ダイバージェンスと定義してもよい．これは

$$D_q[\boldsymbol{p} : \mathbf{1}] = \frac{1}{h_q(\boldsymbol{p})} - c \tag{17.62}$$

で，定数を無視すれば (17.60) と一致する．ちなみに双対 q ダイバージェンスを考えれば，そこから導かれるものは，c_1 と c_2 を定数として

$$D_q^*[\boldsymbol{p} : \mathbf{1}] = D_q[\mathbf{1} : \boldsymbol{p}] = c_1 - c_2 h_q(\boldsymbol{p}) \tag{17.63}$$

で，これは Tsallis のエントロピーに一致する．

17.4 q 測地線，双対 q 測地線，q ピタゴラスの定理

q 幾何学は不変な α 幾何学とは異なるから，測地線と双対測地線も微妙に異

なる．$p_1(\boldsymbol{x})$ と $p_2(\boldsymbol{x})$ を結ぶ q 測地線は

$$\log_q p(\boldsymbol{x},t) = t\log_q p_1(\boldsymbol{x}) + (1-t)\log_q p_2(\boldsymbol{x}) - c(t) \tag{17.64}$$

で与えられる．これは実は $\alpha = 2q-1$ とおいたときの α 測地線とは別の物である．

双対 q 測地線は $\hat{p}(\boldsymbol{x})$ について線形，すなわち

$$\hat{p}(\boldsymbol{x},t) = t\hat{p}_1(\boldsymbol{x}) + (1-t)\hat{p}_2(\boldsymbol{x}) \tag{17.65}$$

である．これも $-\alpha$ 測地線とは異なる．

q ピタゴラスの定理は q ダイバージェンスを用いて得られる．不変な α 幾何学は平坦ではないから，そこではこの定理は成立せず，代わりに球面幾何型の定理が成立する（これについては黒瀬の一連の研究がある）[6,7]．

q ピタゴラスの定理：p_1, p_2, p_3 を 3 つの確率分布とする．p_1 と p_2 を結ぶ双対 q 測地線が p_2 と p_3 を結ぶ q 測地線と q 計量で直交するとき，

$$D_q[p_1 : p_2] + D_q[p_2 : p_3] = D_q[p_1 : p_2]. \tag{17.66}$$

q 射影定理がここから得られる．

q 射影定理：M を S_n の部分空間とする．S_n の点 p が与えられたとき，q ダイバージェンス $D_q[p:r]$ を最小にする M の点 $\hat{r}$ は，双対 q 測地線による p の M への射影で与えられる．また双対 q ダイバージェンス $D_q[r:p]$ を最小にする点 $\hat{r}$ は，p の M への q 測地線による射影で与えられる．

ここで，q 幾何学でのダイバージェンス $D_q[p:r]$ は，不変な α ダイバージェンス $\tilde{D}_q[p:r]$ とは，$\alpha = 2q-1$ として，

$$D_q[p:r] = \frac{1}{h_q(\boldsymbol{p})} D_\alpha[p:r] \tag{17.67}$$

で結ばれている．このため，p が与えられたとき，

$$\arg\min_{r\in M} D_q[p:r] = \arg\min_{r\in M} \tilde{D}_\alpha[p:r] \tag{17.68}$$

が成立する．したがって，q 射影は不変な α 幾何学（$\alpha = 2q-1$）による α 射影と同じである．

q エントロピー最大原理：確率変数 $c_1(\boldsymbol{x}), \cdots, c_m(\boldsymbol{x})$ が与えられ，その q エスコート平均が

$$\hat{E}_p[c_\kappa(\boldsymbol{x})] = a_\kappa, \quad \kappa = 1, \cdots, k \tag{17.69}$$

で束縛されているとする．このとき，$\boldsymbol{a} = (a_1, \cdots, a_k)$ に応じた q エントロピーを最大にする分布の集まりは次の q 分布族

$$\log_q p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta}) = \theta^i c_i(\boldsymbol{x}) - \psi(\boldsymbol{\theta}) \tag{17.70}$$

である．

証明は解析的にも容易にできるが，q ピタゴラスの定理から直ちに得られる．

17.5 共形変換と q 幾何学

q 幾何学におけるリーマン計量 (17.53) は不変性を満たさず，不変な Fisher 情報行列とは異なる．

定理 17.4 q 情報行列は，不変な情報行列と

$$g_{ij}^{q}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{h_q(\boldsymbol{\theta})} g_{ij}(\boldsymbol{\theta}) \tag{17.71}$$

の関係で結ばれている．

証明 q ダイバージェンス D_q は対応する α ダイバージェンスの $1/h_q$ 倍になっている．したがって $D_q[\boldsymbol{p}:\boldsymbol{p}+d\boldsymbol{p}]$ をテイラー展開することで定理が直ちに得られる．双対接続を定義する T も，同様にして q ダイバージェンスの展開で得られる．

q 幾何学では，不変な幾何学に比べて Fisher 計量とダイバージェンスがそれぞれ (17.71), (17.55) のように $\frac{1}{h_q(\boldsymbol{\theta})}$ 倍されている．リーマン幾何学では計量を

$$\tilde{g}_{ij}(\boldsymbol{\theta}) = \sigma(\boldsymbol{\theta}) g_{ij}(\boldsymbol{\theta}) \tag{17.72}$$

のように，各点で大きさだけを変えるものを共形変換と呼ぶ．これにかかわる幾何が共形幾何である．その構造を次の定理で示す．

定理 17.5 ダイバージェンスの共形変換より得られる共形幾何は

$$\tilde{g}_{ij}(\boldsymbol{\theta}) = \sigma(\boldsymbol{\theta}) g_{ij}(\boldsymbol{\theta}), \tag{17.73}$$

$$\tilde{T}_{ijk}(\boldsymbol{\theta}) = \sigma(\boldsymbol{\theta}) T_{ijk} + \partial_i \sigma g_{jk} + \partial_j \sigma g_{ik} + \partial_k \sigma g_{ij}. \tag{17.74}$$

終わりの一言

べき乗則の世界は，指数型にない特徴を備え，裾の長い分布が特徴である．災害統計，収入の分布，さらに Tsallis に始まる非加法的なエントロピーを用いる統計物理で提起された．その幾何学的な基礎は，α 分布族として情報幾何で確立していた．しかし，不変性を無視して，さらに興味ある幾何構造が導ける．今回は，べき乗則にまつわる q 幾何学を議論した．

今回は q 幾何を中心に述べたが，その応用としていろいろなことが考えられる．例えば，q 幾何の範囲で推定関数を考えると，q 推定はロバストになることが江口らによって導かれている．一方，u, v 関数をもっと一般に選んで，双対平坦な空間を構成できる．Naudts らの変形指数型分布族である．しかし，Fisher 計量が不変な幾何学から共形変換で得られるのは，実はべき乗の非線形関数を

選んだ幾何に限られることが証明できる．共形変換の情報幾何とその応用については，紙数の関係でこれ以上述べない．文献 5〜10) を見てほしい．

本稿の議論は，甘利，小原，松添の論文の論文[10]にもとづいている．連載を書き出すと，新しい構想が浮かんで，それを書きたくなる．読者は迷惑かもしれない．本稿の内容も，Leipzig で開かれた情報幾何の国際会議からの帰国の途中，Leipzig 駅，そして列車の中でまとめたものが中心である．

参考文献

1) C. Tsallis, *Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics*, Springer, 2009.
2) J. Naudts, *Generalized Thermostatistics*, Springer, 2011.
3) J. Zhang, Divergence function, duality and convex analysis, *Neural Computation*, **16**, 159–195, 2004.
4) J. Zhang, From divergence function to information geometry: Metric, equiaffine and symplectic structures, *Geometry Symposium, Japan Mathematical Society, Proceedings*, 47–62, 2011.
5) S. Amari and A. Ohara, Geometry of q-exponential family of probability distributions, *Entropy*, **13**, 1170–1185, 2011.
6) T. Kurose, On the divergence of 1-conformally flat statistical manifolds, *Tohoku Math. J.*, **46**, 427–433, 1994.
7) T. Kurose, Conformal-projective geometry of statistical manifolds, *Interdisciplinary Information Sciences*, **8**, 89–100, 2002.
8) I. Okamoto, S. Amari and K. Takeuchi, Asymptotic theory of sequential estimation: Differential-geometrical approach, *Ann. Statist.*, **19**, 961–981, 1991.
9) M. Kumon, A. Takemura and K. Takeuchi, Conformal geometry of statistical manifold with application to sequential estimation, *Sequential Analysis*, **30**, 308–337, 2011.
10) A. Ohara, H. Matsuzoe and S. Amari, Conformal geometry of escort probability and its applications, *Modern Physics Letters B*, **26**, 10, 1250063, 2012.

（あまり・しゅんいち，理化学研究所脳科学総合研究センター）

特　集（2012年11月号予告）

物理と数学における 厳密解

自然現象の解明に向けて

本体952円

特　集（2012年9月号）

ハイゼンベルク

対話と討論が生み出した現代物理の礎

本体952円

編集後記

本号では様々な数学が取り上げられておりますが，そのどれもが超弦理論にアプローチするに相応しい最先端の数学ではないかと思います．研究の最先端に身を置く気鋭の研究者による解説も本特集の読みどころです．

この先，10年，20年と経って，今とは違う新しい超弦理論の数理が登場するかもしれません．そのときは再び今回のような特集を取り上げたいと思います．(R)

＊　　＊

今回の特集では超弦理論と数学の関わりを先生方に紹介していただきました．様々なアイデアやテクニックが解説されていて，読者の皆さんにも楽しんでいただけるのではと思います．

私自身も，高度な内容と感じましたが，最先端の研究を知ることができ，編集していてわくわくしました．

今後もこういった話題の研究を特集していければと思います．(T)

数　理　科　学　10月号

2012年10月1日発行

数理科学編集部　　発行人　木　下　敏　孝
TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで．

発行所　©　株式会社 **サイエンス社**　TEL. (03) 5474–8500 (代表)
〒151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷1–3–25　振替00170–7–2387　(03) 5474–8600 (広告部)

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁